La traduzione dei problemi: dal linguaggio naturale al linguaggio dell'algebra

Al momento di affrontare la risoluzione di **problemi**, le difficoltà maggiori che incontrate riguardano il **linguaggio**:

- comprendere il significato del testo (significato delle parole e costruzione delle frasi)
- comprendere il "ruolo" che hanno i dati forniti dal testo (già comprendere il fatto che non è il **contesto** a differenziare i problemi ma il "ruolo" che i dati hanno all'interno del problema, risulta di difficile)
- "tradurre" dal *linguaggio naturale* al *linguaggio simbolico*. Specialmente quando l'unico modo per risolvere il problema (o il più semplice), è scrivendo **equazioni**.

Le attività che seguono spero vi aiutino a imparare a tradurre problemi: dall'italiano al *matematichese*.

Un primo esempio di traduzione: come il "di" diventa "·"

Se devi trovare "i 3/5 **di** 750" come fai? Molti di voi sono certa che procedono così:

$$750 : 5 = 150 \rightarrow 150 \cdot 3 = 450$$

Osserviamo una cosa però: innanzitutto nulla vieta di effettuare di fila le operazioni indicate (con una parentesi, perché $(750:5)\cdot 3 \neq 750:(5\cdot 3)$. Verificalo).

Attenzione: quelli che seguono non sono *conti* nel senso usuale del termine ma *passaggi di un ragionamento sotto forma di conti*

Partendo da: $(750:5)\cdot 3$, osserva come: $750:5=\frac{750}{5}$ e quindi: $(750:5)\cdot 3 = \frac{750}{5}\cdot 3 = 750\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\cdot 750$.

D'ora in poi potrai perciò tradurre "i 3/5 **di** 750" in: $\frac{3}{5}\cdot 750$

Problemi, con frazioni (o percentuali), di tipo "BASE"

Nei problemi con frazioni di tipo BASE, i dati possono impersonare tre tipi di "ruolo" (come i personaggi di un film): l'**intero**, la **frazione**, la **parte** dell'intero corrispondente alla frazione.

Il problema deve fornirti dei **valori** numerici per due degli elementi indicati e ti chiederà di trovare il terzo elemento.

Se indichiamo con la lettera ***D*** (DATO) il valore numerico assegnato dal problema e con la lettera ***x*** (la lettera che indica l'*incognita*, generalmente) il valore da trovare, possiamo rappresentare in una tabella le **tipologie** di problema BASE che puoi incontrare:

	l'**intero**	la **frazione**	la **parte**
1)	***D***	***D***	***x***
2)	***D***	***x***	***D***
3)	***x***	***D***	***D***

Esempio di problema di tipologia 1: "dati l'**intero** e la **frazione**, trova la **parte"**

"Paolo vuole comprare uno scooter che costa 2760 €, ma possiede solo i 2/3 della somma. Quanto **manca** a Paolo per acquistare lo scooter?"

Prima di partire *in quarta* a scrivere i dati o, peggio, a fare conti, bisogna capire BENE cosa chiede il problema.

Il problema fornisce l'**intero** e chiede di trovare la **parte** di quest'intero corrispondente a una certa **frazione**. MA la parte corrispondente a quale frazione? ai 2/3 dell'intero? Il poblema chiede di trovare quanto MANCA a Paolo per arrivare a 2760 euro, sapendo che lui **ne** ha i 2/3. La frazione corrispondente a quello che dobbiamo cercare non è quindi 2/3 ma quella che manca per arrivare all'intero e cioè: 1/3!

DATI: **intero** = € 2760; **frazione** = 1/3; **parte** =?

La risoluzione del problema, a questo punto, è semplice: $\frac{1}{3} \cdot 2760 = 920$

Risposta: "A Paolo mancano 920 €, per acquistare lo scooter".

NOTA: non è un **errore** trovare i 2/3 di 2760 e poi *sottrarre* la cifra trovata a 2760, ma è una risoluzione meno consapevole e quindi "vale meno" di quella proposta da me.

Esempio di problema di tipologia 2 "dati l'**intero** e la **parte**, trova la **frazione"**

Sul libro ci sono pochi esercizi di questo tipo che invece, specialmente nei problemi con **percentuali**, sono molto importanti.

"La classe **I K** è composta di 30 persone, 12 sono ragazze. Che frazione corrisponde al numero dei **ragazzi**?"

Come prima, bisogna fare attenzione per scrivere correttamente i dati:

DATI: **intero** = 30 studenti; **parte** = 18 ragazzi; **frazione**=?

Di nuovo, scritti i dati, la risoluzione è molto semplice: la **frazione** corrispondente al numero dei ragazzi, rispetto al totale degli studenti di quella classe, è la frazione ridotta ai minimi termini che si ottiene *rapportando* la **parte** con l'**intero**, e cioè: $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

Risposta: i ragazzi costituiscono i 3/5 della classe **I K**.

Esempi di problema di tipologia 3 "dati la **frazione** e la **parte**, trova l'**intero"**

I problemi di questo tipo sono i più difficili e quelli che si prestano meglio ad essere risolti con **equazioni**.

"Ho portato in banca i 5/8 di una somma che ho guadagnato e ho tenuto la **restante parte**, cioè: € 915. Quale somma avevo guadagnato?"

Anche questa volta c'è da fare un ragionamento **prima** di scrivere i DATI: i 5/8 dell'**intero** li porto in banca. Che frazione dell'intero mi resta? $1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

DATI: **intero** = x; **parte** = 915 €; **frazione** = 3/8

Il problema dice che "i 3/8 della ***cosa*** che cerco" ***corrispondono*** a 915€. Ricordando quanto detto a proposito della parte tra virgolette, si ***traduce*** così: $\frac{3}{8} \cdot x = 915$.

A questo punto entra in gioco la proprietà invariantiva per l'uguaglianza che, per le **equazioni**, prende il nome di: "**principio di equivalenza**": se fai la stessa operazione sui due ***membri*** di un'uguaglianza, ottieni un'**uguaglianza equivalente**.

In particolare m'interessa un'uguaglianza al cui **primo membro** stia la ***cosa*** che cerco, da sola (così al secondo membro avrei quanto ***vale***, no?).

Per far questo devo "togliere di mezzo" il fattore 3/8 e cioè moltiplicarlo per il suo **inverso**. Ma se faccio quest'operazione al *primo membro*, devo farla anche al secondo:

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{8}\cdot x = 915\cdot\frac{8}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x = 915\cdot\frac{8}{3} = 305\cdot 8 = 2440$$

Altri esercizi risolti utilizzando equazioni

"Un numero aumentato dei **suoi** 2/7 dà come risultato 495. Qual è quel numero?"

DATI intero **= 495;** parte = ***x***; frazione (*della parte! e da aggiungerle per avere l'intero!!*) **= 2/7**

Come puoi capire dai dati, NON ti trovi davanti a un problema di quelli BASE.

Per scrivere l'**equazione** *basta* tradurre il testo del problema in *matematichese*. Per aiutarvi riscriverò il testo del problema in modo che, spero, sia più semplice la traduzione.

Un numero aumentato dei 2/7 **di quel numero dà come risultato** 495

x	+	(2/7)	·	***x***	=	495

Cioè: ***x*** + (2/7) · ***x*** = 495. E' leggermente più complessa di quella dell'altro esercizio perché bisogna effettuare un **calcolo letterale**: quanto fa ***x*** + (2/7) · ***x*** ?

Utilizzando la **proprietà distributiva** (da destra verso sinistra: ***a·c+b·c = (a+b)·c***) e osservando che ***x*** la posso pensare come: 1·***x***, si ha: ***x*** + (2/7) · ***x***=(1+2/7)·***x*** = (9/7)·***x***.

[Oppure, più intuitivamente: "quanto fa se aggiungo a una ***torta*** i 2/7 di un'altra ***torta*** uguale?" Cioè ti propongo di chiamare la ***x*** con una parola più familiare, come ***torta***, per fare i calcoli con i termini in ***x***]

L'equazione perciò diventa: (9/7)·*x* = 495. Per *risolvere* l'equazione, devi "togliere di mezzo" il fattore 9/7 e moltiplicandolo per il suo inverso. E quest'operazione va fatta sia al *primo membro*, sia *secondo membro*: $\frac{7}{9}\cdot\frac{9}{7}\cdot x = 495\cdot\frac{7}{9} \qquad \Rightarrow \qquad x = 495\cdot\frac{7}{9} = 55\cdot 7 = 385$ Per verificare di aver fatto bene, puoi fare la prova. Cioè verificare che 385 + (2/7) 385 = 495.

"***Moltiplicando*** **una data frazione** per 4/3, ***aggiungendo*** al ***prodotto*** 1/6 e ***dividendo*** la ***somma ottenuta*** per 25/12, **si ottiene** 2/5. Qual è la frazione?"

Traduco direttamente (i colori dovrebbero aiutarti a seguire *cosa corrisponde a cosa*):

[[x · (4/3) ***]*** + 1/6 ***]*** : 25/12 = 2/5

La ***parentesi*** attorno al ***prodotto*** non è obbligatoria: è solo utile, credo, per la *traduzione*.

Nell'**equazione**: [*x*·(4/3)+1/6]·12/25=2/5 ci sono alcune *differenze* rispetto alle due precedenti che abbiamo visto: non c'è nessun **calcolo letterale** da fare, perché di termine in ***x*** ce n'è uno solo ma, al primo membro, ci sono il **fattore** 12/25 e l'**addendo** 1/6.

Nel risolvere le equazioni bisogna sempre ricordare che lo "scopo del gioco" è isolare la ***x*** al *primo membro*. Bisogna perciò lavorare a ***togliere*** (non dimenticando i **principi di equivalenza**). Cominciamo con il *togliere* il fattore 12/25 con il solito metodo: moltiplicando per il suo inverso entrambi i membri dell'uguaglianza:

$$[x\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{6}]\cdot\frac{\cancel{12}}{\cancel{25}}\cdot\frac{\cancel{25}}{\cancel{12}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{25}{12} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4}{3}\cdot x+\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Come *liberarsi* ora di "$\frac{1}{6}$"?

Aggiungendo a entrambi i membri dell'uguaglianza l'**opposto** di $\frac{1}{6}$:

$$-\frac{1}{6}+\frac{4}{3}\cdot x+\frac{1}{6} = \frac{5}{6}-\frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4}{3}\cdot x = \frac{4}{6} \Rightarrow \qquad x = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{4} = 2$$

Fai la prova tu!