Dimostrazioni con il calcolo letterale

1) La somma di **n** naturali consecutivi è data dalla formula: n·(n+1)/2. Cioè: (1+2+3….+n)= n·(n+1)/2.

Cominciamo col provare se questa formula funziona, utilizzando numeri piccoli. Per esempio per n= 5. 1+2+3+4+5=**15** utilizzando la formula abbiamo: 5(5+1)/2=5·6/2=**15**. Prova con il numero che vuoi: se non sbagli i conti, otterrai conferme che *funziona*!

In matematica però, come vi ho detto, per stabilire se un'affermazione è conseguenza logica di tutte le precedenti (questo significa **VERO**, in matematica), si deve fare una **dimostrazione**: un ragionamento rigoroso e generale (non legato a un esempio specifico).

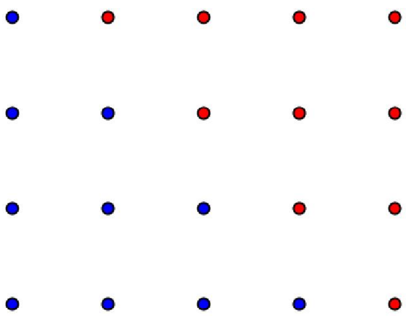
DIMOSTRAZIONE 1 (aritmetica)

Pensando di mettere in colonna, sotto gli **n** naturali scritti in ordine **crescente** (partendo da 1, ogni numero sarà ottenuto aggiungendo **1** al precedente), altrettanti naturali scritti in ordine **decrescente** (partendo da **n**, ogni numero sarà ottenuto togliendo **1** al precedente) ci si può convincere che la somma di ciascuna coppia di numeri in colonna è n+1, come mostrato in figura.

Numeri in ordine crescente	**1**	**2**	**3**	**...**	**n-1**	**n**
Numeri in ordine decrescente	**n**	**n-1**	**n-2**	**...**	**2**	**1**
Passaggi		n-1+2	n-2+3		n-1+2	
somma	**n+1**	**n+1**	**n+1**	**...**	**n+1**	**n+1**

Per la proprietà commutativa dell'addizione sarà come se avessimo sommato **due volte** i numeri da 1 ad **n**, ottenendo **n** volte (tante quante sono le coppie di numeri in colonna) il risultato **n+1**. In linguaggio simbolico:2·(1+2+3….+n)= n·(n+1) da cui, con un semplice passaggio, la tesi: (1+2+3….+n)= n·(n+1)/2.

DIMOSTRAZIONE 2 (geometrica)



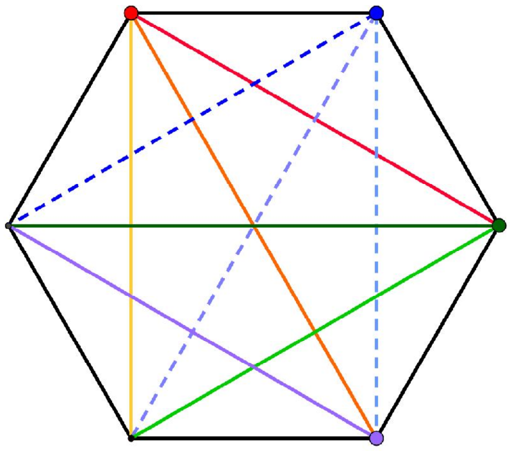
Visivamente, si può rappresentare ciascun naturale come un *insiemi di pallini*, In questo modo la somma dei numeri in colonna, vista nella DIM 1, corrisponderà alla costruzione di un rettangolo di pallini (un rettangolo *discreto*) che avrà un lato fatto di **n** pallini (4 in figura) e l'altro di **n+1** pallini (5 in figura). Si otterranno cioè, di nuovo: **n** file da **n+1** pallini ciascuna (o viceversa).

Per sapere quanti sono i **pallini blu** (o quelli **rossi**) cioè la somma degli **n** naturali consecutivi rappresentati dai pallini – la metà di quelli che formano tutto il rettangolo – si potrà fare l'operazione indicata nella tesi

2) Le diagonali di un poligono con **n** lati(**n**-agono) sono: n·(n-3)/2.

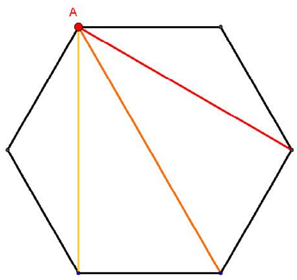
Prendiamo come esempio un **esagono** (non importa che sia regolare, io l'ho disegnato così per semplicità). Cominciamo con il verificare che la formula funziona in questo caso:

#d = 6·(6-3)/2=9. Contando le diagonali nel disegno (le ho tracciate di colori diversi e con stili diversi per aiutarti a contarle), potrai verificare che sono effettivamente 9.



Ma perché è così? **DIMOSTRAZIONE**.

L'esagono ha 6 lati e 6 vertici (ogni poligono ha uguali il numero dei lati e il numero dei vertici).



Prendiamo uno di questi vertici, il vertice **A**. Disegniamo le diagonali che partono da **A**.

Per definizione, le diagonali collegano ciascun vertice con i restanti vertici <u>non consecutivi</u>. Poiché nell'esagono ci sono 6 vertici, il vertice **A** viene collegato dalle diagonali con altri 3 vertici ovvero:

6 – **A** – (2 vertici consecutivi ad **A**)=3 vertici.

Nell'esagono da ogni vertice, quindi, partono 3 diagonali. Se da un vertice partono 3 diagonali, da 6 vertici partono 18 diagonali (6 x 3).

Però teniamo presente che la diagonale che collega, ad esempio, il vertice ***A*** al vertice ***E*** è la stessa che collega il vertice ***E*** al vertice ***A*** – e questo fatto è vero per **ogni coppia** di vertici: nel conto che ho fatto prima ho contato ogni diagonale due volte! – quindi devo dividere le 18 diagonali per 2 ottenendo 9 diagonali.

In generale, <u>ogni vertice</u> di un **n**-agono viene collegato dalle diagonali con i tutti i vertici del poligono, meno sé stesso e i due vertici consecutivi.

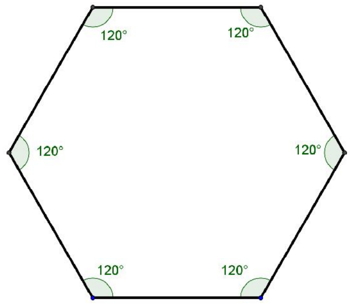
Perciò, se un poligono ha ***n*** vertici, ogni vertice viene collegato dalle diagonali con i restanti vertici, tranne i due consecutivi. Quindi, essendo i vertici ***n***, le diagonali che escono da un vertice sono: ***n-3*** (agli **n** vertici devo togliere quello da cui escono le diagonali e i due vertici consecutivi a questo vertice).

Se da un vertice partono ***n-3*** diagonali, da ***n*** vertici partono ***[n · (n-3)]*** diagonali.

Ma così ogni diagonale è stata contata due volte perciò, per avere il numero di diagonali, dobbiamo dividere il risultato ottenuto per ***2***. #d = n·(n-3)/2.

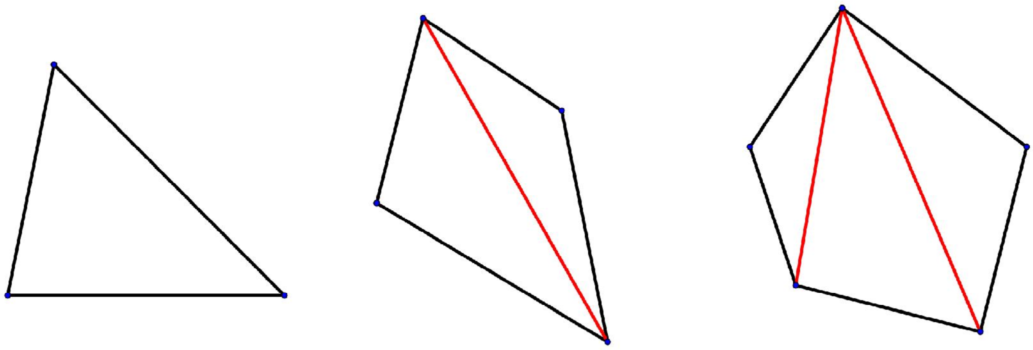
3) La somma degli angoli interni di un n-agono misura
180°(n-2) e, in un **poligono equiangolo**, ogni angolo misura 180°(n-2)/n

Per esempio, in un esagono regolare, ogni angolo misura: 180°(6-2)/6=180°(2/3)=120°.



DIMOSTRAZIONE 1 (in giro se ne trova un'altra, più comune: cercatela!)

Consideriamo alcuni poligoni. In ogni poligono evidenziamo le diagonali uscenti da un vertice: il poligono è suddiviso in triangoli da queste diagonali (quando ci sono).



In un triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto [e questo fatto lo dimostreremo presto] e, contando il numero di triangoli, possiamo determinare la somma degli angoli interni del poligono.

Notiamo infatti che gli angoli dei triangoli sono parte degli angoli del poligono. Cioè: sommando gli angoli dei triangoli otteniamo la somma degli angoli interni dei poligoni.

Osserviamo che il numero di triangoli è sempre **minore di 2** rispetto al numero dei lati del poligono [abbiamo già visto che da ogni vertice escono **n-3** diagonali e ciascuna di queste corrisponde ad almeno un lato di un triangolo. Di triangoli ce n'è uno in più, rispetto al numero delle diagonali, come mostra il caso del triangolo stesso che di diagonali non ne ha proprio!].

Pertanto, in un poligono, la **somma** degli **angoli interni** è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati di quel poligono diminuiti di due: **(n – 2) angoli piatti**.

In simboli: $\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_n = (n-2)\cdot\pi$

Se poi passiamo alle misure, la misura della somma degli angoli interni è: 180°(n-2).

Se il poligono poi è **equiangolo**, cioè ha tutti gli angoli congruenti, ogni angolo misurerà: 180°(n-2)/n.