

## Problemi risolvibili mediante equazioni intere di primo grado in un'incognita

Nella prime lezioni sulle **equazioni**, poiché le equazioni servono a risolvere problemi, vi ho presentato alcuni **problemi**, chiedendovi di tentare di risolverli.

Vi ho anche detto che si potevano risolvere scrivendo un'uguaglianza in cui erano presenti valori noti e il valore da cercare e cioè un' **equazione**, appunto.

Alcuni di voi hanno trovato un metodo per risolvere alcuni dei problemi, ma senza scrivere equazioni: intuitivamente [vi invito caldamente a inviarmi le vostre soluzioni intuitive perché le ritengo interessanti!]. Abbiamo anche visto assieme che per alcuni problemi le risoluzioni intuitive erano molto difficili da trovare.

Rivediamo qui insieme i procedimenti risolutivi, mediante **equazione**, di tali problemi.

### 1) Fabbrichèta

“**Quante automobili** dovrà vendere la fabbrica ZETA affinché il suo **bilancio annuo** risulti *in pareggio*<sup>1</sup> [cioè le entrate **eguagliano** le uscite], nell'ipotesi (irrealistica ma che semplifica notevolmente il problema), che le automobili fabbricate siano vendute tutte?”

Bilancio 2012 Fabbrica di automobili “ZETA”			
ENTRATE (in migliaia di euro)		USCITE (in migliaia di euro)	
Rendita finanziaria	10.000	Funzionamento impianti	1.500
Contributi statali	1.000	Stipendi	6.500
Gadget	500	Pubblicità	10.000
Vendita ogni auto	15	Materiali per ogni auto	5

Vediamo in che modo procedere per risolvere il problema scrivendo un' **equazione**.

1) Per prima cosa bisogna individuare **cosa** chiede il problema:

“**quante** automobili fabbricare/vendere [perché c'è l'ipotesi che le automobili fabbricate siano vendute tutte] affinché le entrate eguagliano le uscite?”. Il **numero di automobili** da fabbricare/vendere lo indichiamo allora con la lettera convenzionale per indicare l'*incognita* (dal latino: *sconosciuta*): la lettera **x**.

2) Un' **equazione** è un' **uguaglianza** e la *richiesta secondaria* del problema, la condizione cui deve sottostare la **cosa** che cerchiamo, la relazione che ci permette di trovarla è: “le entrate **eguagliano** le uscite”, e cioè: **ENTRATE = USCITE**.

3) Ora, puoi osservare che ci sono **ENTRATE** e **USCITE FISSE** (che non dipendono dal numero di automobili vendute, cioè dalla **x**) e **ENTRATE** e **USCITE VARIABILI** (che dipendono dal numero di automobili fabbricate/vendute, cioè dalla **x**).

La **vendita** di ogni automobile consente un **ricavo** di 15.000€ (**ENTRATE**) perciò per sapere il **ricavo complessivo**, corrispondente al numero **x** di automobili vendute (quel numero che stiamo cercando), devi **moltiplicare 15.000€ per il numero x**.

---

<sup>1</sup> Qualcuno è rimasto perplesso riguardo a questa faccenda del pareggio di bilancio: “E come guadagnano”? Attenzione che fra le voci delle uscite ci sono gli STIPENDI, che riguardano TUTTI TUTTI: il grande capo come l'ultimo ingranaggio del sistema... Poi ricordate che questo del problema è un bilancio MOLTO semplificato, rispetto ai bilanci reali...

La **fabbricazione** di ogni automobile **costa** 5.000€ (**USCITE**), perciò per sapere la **spesa complessiva** corrispondente al numero di  $x$  automobili fabbricate (quel numero che stiamo cercando), devi **moltiplicare 5.000€ per il numero  $x$** .

4) Tutto questo considerato puoi scrivere l'equazione risolvendo la quale risolverai il problema. Ricorda che le cifre del bilancio erano in migliaia di euro, perciò 15.000€, per esempio, lo scriviamo: 15 k€ (il prefisso delle migliaia è k!):

$$10.000 + 1.000 + 500 + 15 \cdot x = 1.500 + 6.500 + 10.000 + 5 \cdot x$$

Facendo i conti (prima sommiamo i termini simili in ogni membro, poi portiamo i termini con le incognite al primo membro e i termini noti al secondo, poi moltiplichiamo ambo i membri per l'inverso del coefficiente di  $x$ ) troviamo che:

$$\begin{aligned} 11.500 + 15 \cdot x &= 18.000 + 5 \cdot x && \rightarrow && 15 \cdot x - 5 \cdot x = 18.000 - 11.500 && \rightarrow \\ 10 \cdot x &= 6.500 && \rightarrow && x = 6500/10 = 650 \end{aligned}$$

Cioè: la fabbrica ZETA, per avere il bilancio in pareggio, deve vendere 650 automobili.

**N.B.** Non si tratta di 650.000 automobili: se anche infatti all'ultimo passaggio utilizzassimo le cifre in €, invece che k€, avremmo:

$$10.000 \cdot x = 6.500.000 \quad \rightarrow \quad 10.000 \cdot x = 6.500.000 \quad \rightarrow \quad x = 6.500.000/10.000 = 650$$

Oppure – così vi avvantaggiate per la Fisica che studierete l'anno prossimo - potete scrivere non le cifre PURE ma accompagnate dalle loro unità di misura (u.d.m.) e vedere come si semplificano le u.d.m.:  $10\text{k€ } x = 6.500\text{k€} \rightarrow x = (6.500\text{k€}) / (10\text{k€}) = 650$ .

**Conclusioni:** di una fabbrica piccola stiamo parlando, se basta che fabbrichi 650 auto per avere il bilancio in pareggio! Certo se la **rendita finanziaria** fosse più bassa o gli **stipendi** più alti, le auto da vendere sarebbero molte di più. Oppure se il prezzo di vendita fosse molto più alto (pensiamo a qualche marca famosa, anche italiana), certo anche i costi sarebbero maggiori, ma credo che il numero di macchine da vendere scenderebbe.

Ricordate che i numeri li ho inventati io e non ho la più pallida idea della loro veridicità!

Analogo al problema della “Fabbrichetta” è il problema del **negozio di Lucia**. Vediamo lo quindi di seguito per fissare le idee e approfondire alcune questioni.

## 2) Il negozio di Lucia

“Lucia ama confezionare maglioni e vuole aprire un negozio in cui vendere i suoi manufatti. Inizia a raccogliere informazioni sulle **spese mensili** e scopre così che: l'**affitto** di un locale adatto è di **1250€**; le **spese** per l'**elettricità** sono di circa **200€**; per **telefono**, connessione **internet** e **POS** le servono **50€**; altri **100€** circa se ne vanno in **tasce** varie.

Sapendo che il **costo** di **lana** e **rifiniture** per ogni maglione è circa **30€**, e che Lucia pensa di vendere ciascun maglione a **150€**, **quanti maglioni** al mese dovrebbe fare Lucia (vendoli TUTTI) per incassare, a fine mese, uno **stipendio** (al lordo dalle tasse) di **2000€**?”

Questo problema ha una **struttura** identica al precedente. Le differenze sono tre:

**A)** Non è scritto nel testo, ma devi pensarci da te, che c'è da scrivere un **bilancio**.

**B)** per costituire il bilancio, in che colonna va inserito lo **stipendio**?

**C)** che **uguaglianza** utilizzare per scrivere l'equazione?

Non ha senso scrivere un bilancio senza utilizzare una tabella ENTRATE/USCITE. In questa tabella lo **stipendio** va inserito fra le **USCITE FISSE**. Lascia perdere che è Lucia che paga le spese e Lucia che incassa lo stipendio: il soggetto del bilancio è il NEGOZIO! Fai finta che il negozio sia il DATORE DI LAVORO di Lucia.

L'uguaglianza da utilizzare per risolvere il problema è il **pareggio di bilancio**, che è un requisito di base di ogni attività commerciale SANA. Il pareggio di bilancio è un punto di partenza. Se le entrate supereranno le uscite, o si pagheranno più tasse sul guadagno extra o ci si alzerà lo stipendio! Ma seguiamo lo **schema** di prima.

Bilancio mensile negozio di Lucia	
ENTRATE (in €)	USCITE (in €)
	Affitto 1250€
	Elettricità 200€
	Linea 50€
	Tasse 100€
	Stipendio 2000€
Ricavo ogni maglione 150€	Costo ogni maglione 30€

1) La **cosa** da trovare è **quanti maglioni** fare/vendere perché entrate e uscite (stipendio compreso) siano uguali.

2) L'uguaglianza da utilizzare è, appunto: ENTRATE = USCITE

3) Le **entrate fisse** questa volta non ci sono<sup>2</sup>. Ci sono: **USCITE fisse** e **variabili** e **entrate variabili**.

4) L'**equazione** risolutiva è:  $150€ \cdot x = 1250€ + 200€ + 50€ + 100€ + 2000€ + 30€ \cdot x \rightarrow$   
 $150€ \cdot x - 30€ \cdot x = 3350€ \rightarrow 120€ \cdot x = 3350€ \rightarrow x = 3600€ / 120€ = 30$

**Risposta** Lucia deve fabbricare e vendere 30 maglioni al mese per poter incassare 2000€ dal suo negozio (pagando poi circa il 30% di tasse s'intascherà, alla fine, circa 1400€).

E' interessante osservare come in problemi di questo tipo, e del precedente, si può porre come incognita uno qualunque dei dati forniti ottenendo così alcune *variazioni sul tema*.

Per esempio, stabilendo quanti sono i maglioni (o le macchine) fabbricati/venduti, si può **chiedere** quanto incassa Lucia ogni mese; oppure stabilendo incasso e numero di maglioni (o macchine) si può chiedere quante spese fisse sostiene, ecc...

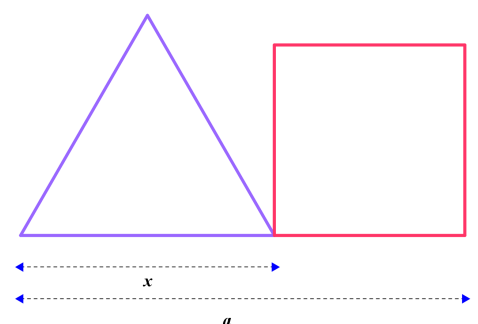
Puoi *divertirti* a inventare problemini del genere e sottoporli ai compagni!

Interessanti sono i casi in cui i dati portano a scrivere **equazioni impossibili** o **indeterminate** o con **soluzione** che numericamente esiste ma, in relazione al problema da risolvere, NON HA SENSO. Come un **numero negativo** se si sta cercando una quantità che non può essere negativa come il numero di cose vendute o la misura di un segmento.

### 3) Il triangolo e il quadrato – Libro dell'altr'anno; pag 445, problema n. 475

“Su un segmento di misura **a** si costruiscono un *triangolo equilatero* di lato **x** e un *quadrato*, come indicato in figura. Qual è la *condizione* affinché i due poligoni abbiano **uguale perimetro**?”

In tale situazione, *come dev'essere a* perché **x** risulti un numero intero?”



<sup>2</sup> Potrebbero esserci entrate fisse se, per esempio, Lucia *subaffittasse* una parte del negozio a qualcun altro.

[testo copiato pedissequamente, grassetti e corsivi miei, disegno **definitivo**]

In questo caso la **figura** è fornita dal problema e questo rappresenta una difficoltà in meno. In classe ho dettato un testo differente, che richiedeva faceste voi la figura.:

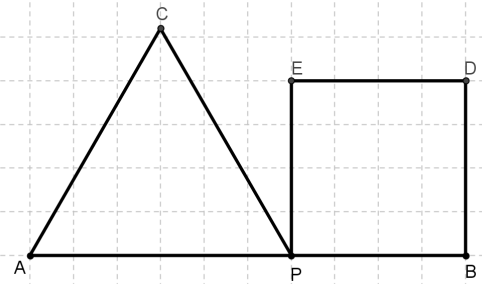
“Su un segmento AB di lunghezza **a**, in che **posizione** devi mettere il punto **P** affinché il triangolo equilatero APC abbia **stesso perimetro** del quadrato PBDE?”

In che modo procedere se la **figura** dovete farla da voi?

Dev'essere chiaro innanzi tutto che all'inizio si traccia una **figura provvisoria** e, dopo che il problema è risolto, utilizzando le misure ottenute, si DEVE fare una **figura definitiva** (come quella che ho realizzato a inizio pagina).

Presupponendo abbiate quaderni a **quadretti** dovreste, per questo problema, tracciare un **segmento** di *lunghezza “giusta”* (né troppo piccola, né troppo grande); su questo segmento posizionare **P** in modo che NON sia il **punto medio** (salvo indicazioni precise, il disegno dev'essere più **GENERICO** possibile) e poi costruire su **AP** un **triangolo equilatero** e su **PB** un **quadrato**.

Per costruire un **triangolo equilatero** per bene occorre il compasso. Una **buona approssimazione** può essere un **triangolo isoscele** con **6** quadretti di **base** e **5** di **altezza** (o multipli). Come qui a destra.



Procediamo ora alla risoluzione del problema.

1) C'è da capire qual'è la *cosa* da cercare. Nella formulazione del libro la **x** viene indicata esplicitamente. Nella formulazione che ho dato in classe c'è da tradurre: “POSIZIONE di **P**” in “misura della *lunghezza* del segmento **AP**”, la misura della lunghezza si **AP** sarà la nostra **x**.

2) C'è da mettere tutti gli elementi del problema in relazione con la **x**. Ne abbiamo discusso a lungo in classe e tutte le relazioni possibili sono risultate queste (**dati**):

$$\overline{AB} = a \quad \overline{AP} = x \quad \overline{PB} = a - x \quad p_{APC} = p_{PBDE} \quad x = ?$$

3) L'uguaglianza risolutiva è quella fra i perimetri che ci permette di scrivere l'equazione:

$$4) 3 \cdot x = 4 \cdot (a - x) \Rightarrow 3 \cdot x = 4 \cdot a - 4 \cdot x \Rightarrow 3 \cdot x + 4 \cdot x = 4 \cdot a \Rightarrow 7 \cdot x = 4 \cdot a \Rightarrow x = 4/7 a$$

Se **a** è un multiplo di 7, **x** sarà un **numero intero**. Per fare il disegno, ho preso **a=14**

Ulimo ma non ultimo, il problema in questione abbiamo visto che potrebbe scaturire da una situazione reale del tipo:

“Gabriele vuole creare un'orlatura per i jeans costituita dall'alternanza di quadrati e triangoli equilateri, come mostrato in figura. Perché il lavoro



sia eseguito bene, e non sia troppo complicato, devono realizzarsi le seguenti condizioni: le fettucce per i triangoli devono essere della stessa lunghezza delle fettucce dei quadrati; tali fettucce devono avere una misura espressa mediante un numero intero; la somma delle basi dei triangoli e dei quadrati non deve superare la circonferenza del Jeans che è di 70 cm. Che misura possono avere le lunghezze dei lati dei triangoli e dei quadrati per rispondere alle richieste?”

## 4) Partita IVA

Nel mondo del lavoro è sempre più raro trovare un'occupazione "normale". In particolare se si fa un lavoro "creativo" è quasi certo che si lavorerà "a partita IVA", cioè pagando, per cominciare, una tassa del 21% su quanto si FATTURA e cioè su quanto il cliente – si spera – paga per il lavoro che ha commissionato.

Immagina di essere una "Partita Iva". Per un certo lavoro vorresti intascare 10.000 euro al *netto* del pagamento dell'IVA (suponiamo, per semplificare i conti, che l'IVA sia ancora al 20%, com'era fino a un anno fa). Quanto devi fatturare per quel lavoro?

- 1) la **cosa** da **trovare** è la cifra da scrivere in fattura
- 2) la condizione che ti permetterà di scrivere l'equazione risolutiva è che: tolta alla somma fatturata il 20% della somma stessa, restino 10.000 euro.
- 3) L'equazione risolutiva sarà perciò:  $x - 20\% \cdot x = 10.000$

A questo punto devi ricordare che  $20\% = 20/100 = 1/5$ . La tua equazione diventa quindi:

$$x - \frac{1}{5} \cdot x = 10.000 \rightarrow \frac{5}{5}x - \frac{1}{5} \cdot x = 10.000 \rightarrow \frac{4}{5} \cdot x = 10.000 \rightarrow x = 10.000 \cdot \frac{5}{4} = 12.500$$

Puoi anche fare meno passaggi e osservare che la somma che rimane, pagata l'IVA, è l'80% della somma originaria.  $80\% = 80/100 = 4/5$ . Salti quindi un paio di passaggi di conto e non è male!

Osserva che il ragionamento seguito è IDENTICO a quello seguito nel problema del cappotto dato nella verifica in IIA (verifica la cui correzione si trova sul sito).

**Risposta.** Per incassare, al netto dell'IVA (al 20%); € 10.000, dovrai fatturare €12.500.

## 5) Il circolo sportivo

Un circolo sportivo propone due possibili tipi di pagamento (relativi allo stesso tipo di fruizione di attrezzature e corsi, e allo stesso periodo di tempo: 12 mesi): un abbonamento da 1000€, oppure il pagamento di una tessera iniziale di 100€ e poi 10€ a ingresso.

Sapendo che frequenterai effettivamente la palestra per non più di 45 settimane nell'anno, che frequenza settimanale renderebbe più conveniente l'abbonamento annuale?

- 1) la **cosa** da trovare è il numero di ingressi minimi che fa sì che il pagamento di tessera + ingressi raggiunga il costo dell'abbonamento. Dopodiché dovrai dividere quel numero d'ingressi per il numero di settimane nelle quali ritieni che, effettivamente, frequenterai il circolo. Se pensi di effettuare un numero d'ingressi certamente superiore al valore trovato, allora sarà più conveniente l'abbonamento.
- 2) L'equazione da scrivere è dunque:  $100 + 10 \cdot x = 1000$
- 3) La soluzione è:  $10 \cdot x = 1000 - 100 \rightarrow x = 900/10 = 90$ .  $90/45 = 2$ .

**Risposta** Se ritieni che andrai in palestra circa due volte a settimana, ti converrà pagare il singolo ingresso. Se pensi che andrai in palestra all'incirca tre volte alla settimana, l'abbonamento è certamente conveniente

**Osservazione:** questo problema è formalmente identico a quello denominato: "cinema 2" nell'altro file di problemi svolti.