

La legge di conservazione dell'energia meccanica

DEF1 Una forza si dice **conservativa** se il lavoro di quella forza, calcolato su una traiettoria chiusa, è 0.

DEF2 Una **forza** si dice **conservativa** se il lavoro di quella forza, calcolato su una qualunque traiettoria che abbia stesso punto di partenza e stesso punto d'arrivo è 0.

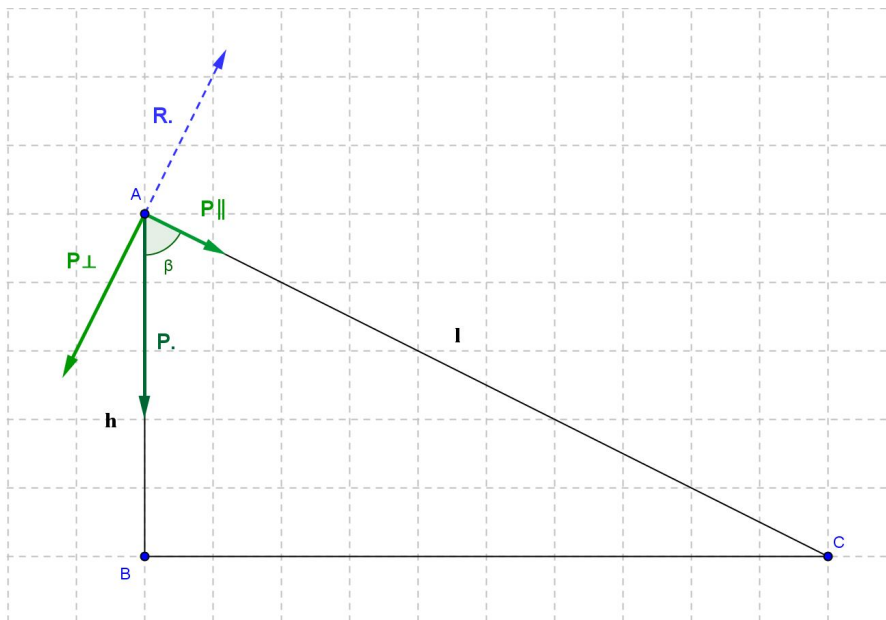
APPROFONDIMENTO (facoltativo): Se e solo se una forza è conservativa, per il teorema delle forze vive¹ la variazione di energia cinetica totale calcolata lungo un percorso chiuso è 0. Cioè, le velocità "di ritorno" devono essere punto per punto uguali in modulo alle velocità di "andata". Un moto del genere si dice REVERSIBILE. Perché un **moto** sia **reversibile** deve accadere che un punto materiale che parte da un certo punto **A** con velocità \vec{v}_i e arriva in un punto **B** con velocità \vec{v}_f , sotto l'azione della stesa forza possa partire dal punto **B** con velocità $-\vec{v}_f$ e arrivare nel punto **A** con velocità $-\vec{v}_i$. Se registri con una videocamera un **moto reversibile** (su sfondo bianco) e poi lo proietti in modalità *rewind*, otterrai ancora un moto compatibile con le forze che generano il moto: non si può distinguere se la proiezione è in PLAY o in REWIND.

ES Se vediamo un filmato che mostra un oggetto che si muove in orizzontale partendo da fermo e accelerando e ci viene detto che la forza agente è solo la **forza elastica**, non sappiamo distinguere se il filmato sia in REWIND e la molla l'abbia frenato nella versione PLAY, o se sia in modalità PLAY e la molla fosse compressa prima delle riprese.

CONTRES Se vediamo un filmato che mostra un oggetto che si muove in orizzontale partendo da fermo e accelerando e ci viene detto che la forza agente è solo **l'attrito** scopriamo che è il filmato *al rovescio*! Perciò il moto NON è reversibile.

Quindi una forza è conservativa se e solo se produce un **moto reversibile** e cioè simmetrico dal punto di vista dello scorrere del tempo.

Dimostrazione della conservatività della forza peso (obbligatoria)



Utilizziamo la **DEF2** (mi sembra vi sia chiaro che le due definizioni sono equivalenti) e vediamo come il **lavoro** che la **forza peso** compie per portare un punto materiale dalla posizione **A** alla posizione **B** è lo stesso sia che il punto materiale segua la traiettoria **AB** sia che segua la traiettoria **ACB**. Indicherò in grassetto i vettori.

Per capire la dimostrazione devi aver chiaro come si calcola il **lavoro** di una forza (vedi

presentazione PP nel sito) e qual è la *definizione trigonometrica* di **coseno** di un angolo (vedi schede relative sul sito, nella sezione matematica della classe quarta).

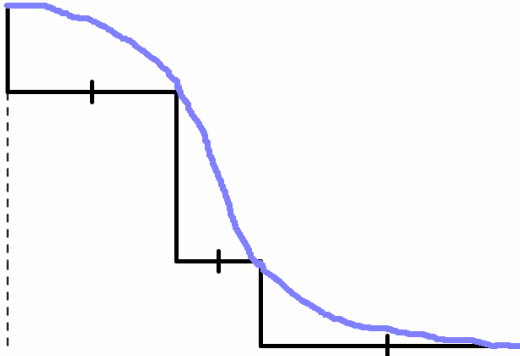
$$L_{AB} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{h} = P \cdot h \cdot \cos 0 = P \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

$$L_{ACB} = L_{AC} + L_{CB} = L_{AC} \text{ perché il tratto } \mathbf{CB} \text{ è } \textit{perpendicolare} \text{ alla forza peso e, se forza e spostamento sono perpendicolari, il lavoro della forza è 0 (} \cos 90^\circ = 0 \text{)}.$$

¹ **Teorema delle forze vive:** la variazione d'energia cinetica di un punto materiale che si sposti da una posizione A a una posizione B sotto l'azione di una certa forza, è uguale al lavoro di quella forza: $\Delta K_{AB} = L_{AB}$

$$L_{AC} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{l} = P \cdot l \cdot \cos\beta = P \cdot l \cdot \frac{h}{l} = P \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

Come volevamo dimostrare. Osserva, per inciso, come $P \cdot \cos\beta = P_{//}$ e questo dovrebbe convincervi del fatto che il lavoro modella il contributo effettivo di una forza allo spostamento di un punto materiale: la componente ortogonale al piano inclinato della forza peso è infatti bilanciata dalla *reazione vincolare* ed è solo la componente parallela al piano della forza peso a far sì che il punto materiale scivoli lungo il piano stesso.



In generale, per ottenere il lavoro della **forza di gravità** lungo una **traiettoria** di forma qualunque posso *approssimare* sempre tale traiettoria con una "scaletta" (come avviene nello schermo del computer: non esistono VERE CURVE infatti ma solo scalette che con gradini talmente piccoli – coincidenti con i lati dei pixel – che i nostri occhi non li riescono a percepire) nella quale le parti ortogonali alla forza (segnate con un trattino in figura) danno contributo nullo al calcolo del lavoro e la somma dei tratti che non danno contributo nullo è congruente con il tratto che il corpo percorrerebbe in CADUTA LIBERA!

Tale regola vale solo per i *moti reversibili*. Supponiamo infatti che la forza che agisce sulla massa che si muove lungo un segmento in andata **AB** e ritorno **BA** (in **B** c'è un **urto completamente elastico** che fa tornare indietro la massa prima che la velocità diventi nulla) sia una **forza d'attrito**. L'attrito radente è costante in modulo, parallelo allo spostamento ma opposto in verso allo spostamento stesso, perciò la **velocità** della massa diminuisce sia nel percorso di andata che nel percorso di ritorno e quindi: $W_{TOT} = K_f - K_i < 0$.

La legge di conservazione dell'energia meccanica. L'energia potenziale.

La **forza di gravità**, per spostare una massa **m** dalla quota h_1 alla quota h_2 compie un **lavoro** quantificabile in: $W_{1-2} = m \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2$ qualunque percorso segua.

D'altra parte, per il **THM delle forze vive** si ha: $W_{1-2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$. Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza: $mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$, cioè: $mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$.

Siamo giunti alla **legge di conservazione dell'energia meccanica gravitazionale** che asserisce: $mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \text{cost}$ in tutti i punti e quindi in tutti gli istanti del moto².

Ma cos'è **mgh**? La sua unità di misura è il Joule e quindi si tratta di un'**energia**. Il suo nome è **energia potenziale gravitazionale**³: $\Delta U = U_B - U_A = W_{B-A}$. Si può ottenere calcolando il lavoro che la forza compirebbe "se libera d'agire" (cfr esempio sopra)

La **formulazione generale della legge di conservazione dell'energia meccanica** di cui sopra è: $E_M = K + U = \text{cost}$ e vale per tutti i **moti reversibili**.

Le *forze che determinano moti reversibili* si dicono, appunto: **forze conservative**

² Pensa ad un corpo che cade da h e arriva al suolo. $K_0=0$ e la quantità di cui sopra è data da mgh , quando tocca il suolo $K_f = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2$ e l'altra è zero: mgh e $\frac{1}{2}mv^2$ sono due grandezze che si trasformano una nell'altra!

³ *potenziale* si riferisce alla **posizione** occupata, **gravitazionale** alla forza che la determina: è un tipo di energia che cambia espressione a seconda della forza che la determina: per l'energia elastica è $-\frac{1}{2}kx^2$.