Seno, coseno e tangente di un angolo qualunque: la circonferenza goniometrica

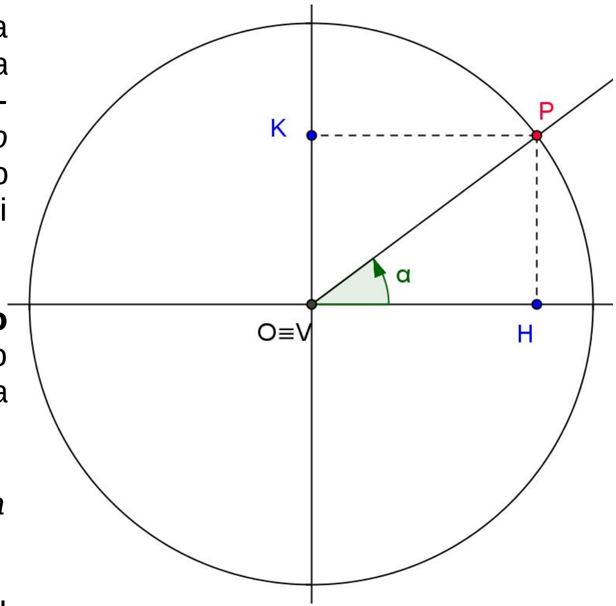
Per estendere la **definizione** di ***seno***, ***coseno*** e ***tangente*** a un **angolo qualunque** (sinora abbiamo definito queste grandezze solo in relazione a un *angolo acuto*), ci serviremo delle conoscenze acquisite in geometria analitica.

Per i nostri scopi è innanzitutto importante stabilire come collocare un angolo all'interno di un sistema di riferimento cartesiano (d'ora in poi: **SdR** *Oxy*).

Un angolo è *completamente determinato* quando si forniscano la posizione dei suoi lati (semirette) e del suo vertice (punto d'incontro dei lati). D'ora in poi collocheremo il vertice di un qualunque angolo nell'origine **O** del **SdR**, un lato *fisso*, coincidente con il semiasse positivo delle ascisse (d'ora in poi: ***adx***$^+$) e l'altro lato *libero di ruotare*.

Per la misura degli angoli si assumono come origine ***adx***$^+$e per **verso positivo** quello antiorario. A questo punto ci serve definire uno "strumento" che utilizzeremo molto.

DEF Circonferenza goniometrica: circonferenza avente centro coincidente con l'origine O del SdR e **raggio uguale a 1**.



DEF In riferimento alla figura - ottenuta posizionando un angolo α come indicato sopra e tracciando una circonferenza goniometrica - il punto **P,** intersezione fra *lato libero* dell'angolo e circonferenza goniometrica, lo chiamiamo **punto goniometrico**. Ogni angolo individuerà un punto goniometrico.

A partire dalla *vecchia* definizione di **seno** dell'angolo α (rapporto fra *misura* del cateto **PH**, opposto all'angolo e *misura* dell'ipotenusa **OP**), ricaviamo la nuova definizione:

sen$\boldsymbol{\alpha}$ = $\overline{PH}/\overline{OP} = \overline{PH}/\mathbf{1}$ *(poiché l'ipotenusa coincide con il raggio che è uguale a 1)*

$\overline{\mathbf{PH}}$ è, oltre che *misura* di un cateto del triangolo rettangolo PHO, **ordinata del punto goniometrico**, perciò:

DEF Il **seno** di un **angolo** è l'**ordinata** del **punto goniometrico** corrispondente.

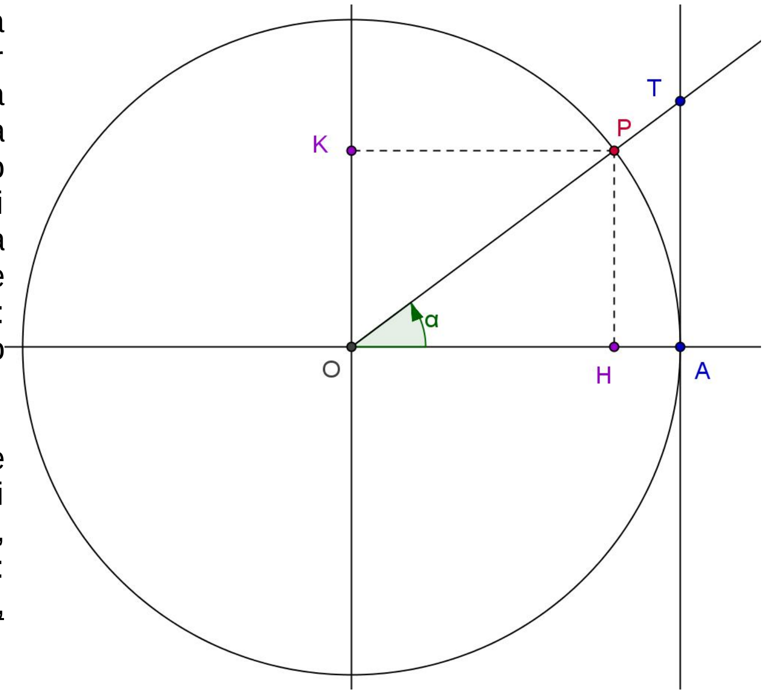
Analogamente procediamo per fornire la nuova definizione di **coseno** di un **angolo**. Dalla definizione precedente avevamo:

cos$\boldsymbol{\alpha}$**=** $\overline{\mathbf{OH}}/\overline{\mathbf{OP}} = \overline{\mathbf{OH}}/\mathbf{1}$

Ma $\overline{\mathbf{OH}}$ è, oltre che *misura* di un cateto del triangolo rettangolo PHO, **ascissa del punto goniometrico** perciò:

DEF Il **coseno** di un **angolo** è l'ascissa del **punto goniometrico** corrispondente.

Per dare una definizione della tangente di un angolo valida per angoli di ampiezza qualunque (la definizione precedente era valida solo per *angoli acuti*), aggiungiamo la <u>retta</u> **t**, <u>tangente</u> nel punto **A** di coordinate (1;0) alla circonferenza goniometrica (**t**: x=1), e consideriamo il punto **T**: intersezione tra il lato libero dell'angolo e la retta **t**.



DEF Il segmento **TA** ha come estremi due punti appartenenti rispettivamente ai lati dell'angolo α, quindi possiamo definirlo come: <u>segmento della retta tangente **t**, *individuato* dall'angolo α</u>

Dalla definizione precedente di tangente di un angolo avevamo: $\mathbf{tg\alpha}$ = $\overline{\mathbf{TA}}/\overline{\mathbf{OA}}$ = $\overline{\mathbf{TA}}/\mathbf{1}$ (**OA** è un raggio della circonferenza e perciò misura 1)

Ma $\overline{\mathbf{TA}}$ è, oltre che *misura* di uno dei cateti del triangolo rettangolo TAO, e misura del segmento della retta **t** individuato da α, anche **ordinata** del punto **T** .

In questo caso la definizione generale di tangente di un angolo può darsi in due modi (Scegli quello che preferisci):

DEF1 La **tangente** di un angolo è la *misura* del segmento di tangente individuato dall'angolo

DEF2 La **tangente** di un angolo è l'ordinata del punto d'intersezione tra il lato libero dell'angolo e la retta **t**: x=1.

Ricapitolando: ***P***(*cos*α*; sen*α) *e* ***T***(*1;tg*α)

Prima e seconda relazione fondamentale della goniometria

Applicando il **Teorema di Pitagora** al triangolo **PHO** si ha: $\overline{PH}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{OP}^2$

Considerando che: $\overline{\mathbf{OP}}$ = 1, $\overline{\mathbf{PH}}$ = senα e $\overline{\mathbf{OH}}$ = cosα si ha: $\mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$

Allo stesso risultato si perviene osservando come l'equazione della circonferenza goniometrica sia: $x^2 + y^2 = 1$ e al posto delle coordinate cartesiane di un punto generico della circonferenza (x;y), possiamo inserire: *(cos*α*; sen*α*).*

sen$^2\alpha$ + ***cos***$^2\alpha = 1$ è la **prima relazione fondamentale** della **goniometria.**

La **seconda** relazione **fondamentale** della **goniometria** riguarda *tg*α e si basa sull'osservazione che i triangoli **PHO** e **TAO** sono *simili*, perché hanno angoli corrispondenti congruenti, e perciò hanno i lati in proporzione: $\overline{\mathbf{TA}}/\overline{\mathbf{OA}}$ **=** $\overline{\mathbf{PH}}/\overline{\mathbf{OH}}$**.**

Cioè: *tg*α = *sen*α */cos*α, che è la **seconda relazione fondamentale** della **goniometria** (e <u>non</u> una *definizione* di tangente. Almeno nel ragionamento che stiamo seguendo noi).