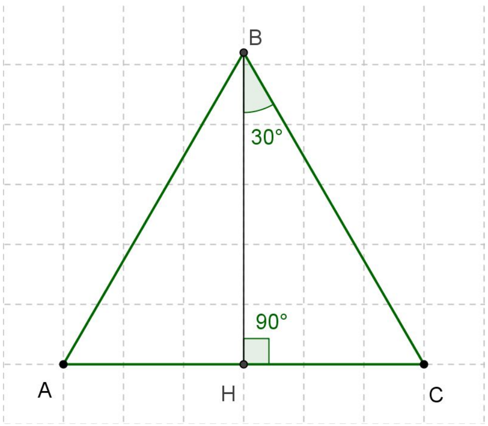
DEF di: sen(α), cos(α) e tg(α) di un angolo acuto – Risoluzione triangoli rettangoli

A) triangoli rettangoli con un angolo **di 30° (o di 60°: per EX sviluppa questa parte)**

La **somma degli angoli <u>interni</u> di un triangolo è** 180° Quindi se un **triangolo rettangolo** ha un angolo di 30°, l'altro angolo acuto[1] sarà: 180° - 90° - 30° = 60°

Un **triangolo equilatero** ha gli angoli tutti uguali, quindi misureranno? 180° : 3 = 60°

Il nostro **triangolo rettangolo** con un angolo di 30° posso ottenerlo come *metà del triangolo equilatero* **ABC** (così pure un triangolo rettangolo con angolo acuto di 60°).



Cioè, il triangolo rettangolo che ci interessa studiare si può ottenere tracciando l'altezza relativa ad uno dei lati di **ABC**. Tracciamo l'altezza BH, relativa al lato AC e consideriamo il triangolo **CHB**.

Se il lato del triangolo equilatero misura ***l*** (*elle* e non: uno!), sarà: $BC = l$, $CH = \frac{l}{2}$ e $BH = h = \frac{l}{2}\cdot\sqrt{3}$, come puoi ritrovare applicando Pitagora a **CHB** :

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\cdot l^2 - l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\cdot l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{l^2}}{\sqrt{4}} = \frac{l}{2}\cdot\sqrt{3}$$

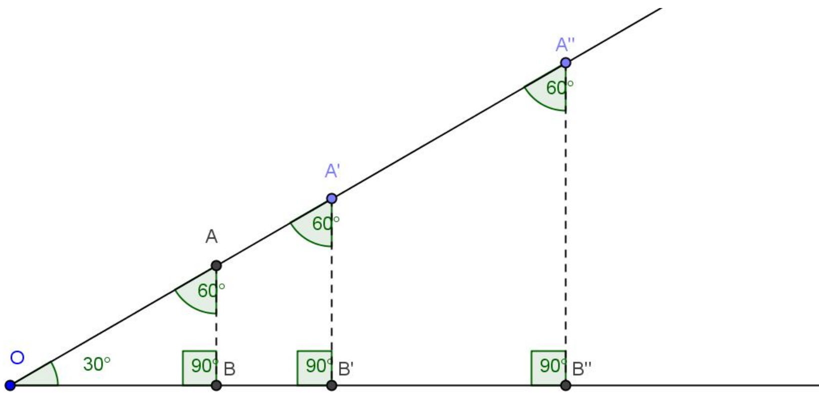
Abbiamo ***risolto*** un triangolo rettangolo con angolo di 30°, cioè ne abbiamo <u>determinato misura degli angoli e dei lati</u>, utilizzando una misura *generica* del lato: ***l***, quindi il nostro risultato ha carattere completamente generale.

Riflettiamo sul fatto che l'osservazione decisiva è stata la <u>determinazione della misura degli angoli</u>: è in base a questo che abbiamo potuto stabilire la *relazione fra i lati del triangolo*

Possiamo quindi utilizzare i risultati ottenuti per qualunque altro triangolo rettangolo che abbia un angolo di 30° (o, analogamente, un angolo di 60°).

Puoi costruire *infiniti* triangoli di questo tipo, come mostrato in figura.

I triangoli AOB, A'OB', A''OB'', ... sono tutti ***simili***[2] tra loro perchè hanno tre angoli congruenti: l'angolo di 30°, l'angolo di 90° e il terzo per differenza. Quindi i lati *corrispondenti* sono in proporzione fra loro.



Ponendo: $OA = l$, quindi (l'abbiamo visto prima): $AB = \frac{l}{2}$ e $OB = \frac{l}{2}\cdot\sqrt{3}$, sarà:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = ... = \frac{l}{2}\cdot\frac{1}{l} = \frac{1}{2} \quad ;$$

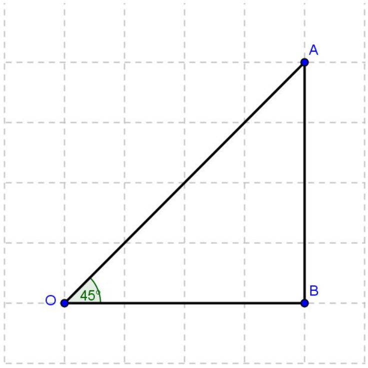
$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = ... = \frac{l}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'} = ... = \frac{l}{2}\cdot\frac{2}{l\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

---

[1] Un triangolo rettangolo può avere un angolo ottuso? NO, perché: essendo la somma degli angoli interni di un triangolo 180° e essendo già un angolo di 90°, la somma degli altri due sarà 90°, quindi ciascuno dei due angoli non retti misurerà *meno* di 90°, sarà pertanto *acuto*.

[2] La definizione *ufficiale* di similitudine è molto complessa. Ci accontenteremo della seguente: **DEF** Due figure si dicono **simili** quando hanno i <u>lati *corrispondenti* in proporzione</u>. **CRITERIO** di similitudine dei **triangoli**: due triangoli sono simili *sse* hanno gli <u>angoli congruenti</u>.

B) Triangoli rettangoli con un angolo di 45°



Il triangolo rettangolo **AOB** ha un angolo acuto di 45° e un cateto lungo ***b***. L'altro angolo acuto misura anch'esso 45°. Il triangolo in questione si può quindi ottenere come *metà di un quadrato*

I lati del triangolo AOB misurano: $OB = AB = b$ e $OA = b \cdot \sqrt{2}$

Come abbiamo fatto prima possiamo costruire tanti triangoli simili a questo (disegnali):

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = ... = \frac{b}{b \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = ... \quad \frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'} = ... = 1$$

In questo modo abbiamo individuato dei **rapporti che rimangono costanti una volta fissato l'angolo acuto** di 45°, come prima li avevamo trovati per l'angolo di 30° (e di 60°).

Questi rapporti **non** dipendono dalle *dimensioni* del triangolo rettangolo considerato; sono invece legati solamente all'*ampiezza dell'angolo*: nei nostri esempi solo 30°, 45° e 60°.

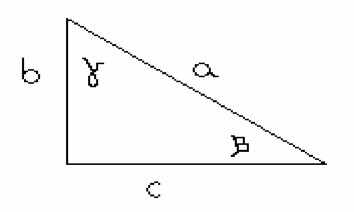
Come sempre in matematica quando si trovano relazioni fra grandezze che sono costanti, ai valori di questi rapporti sono stati dati nomi particolari[3] che evidenziano come i rapporti stessi siano in relazione solo con l'angolo. Dato un generico angolo α, quindi, definiamo:

sen(α)= (cateto opposto all'angolo α)/ipotenusa

cos(α) = (cateto adiacente all'angolo di α)/ipotenusa

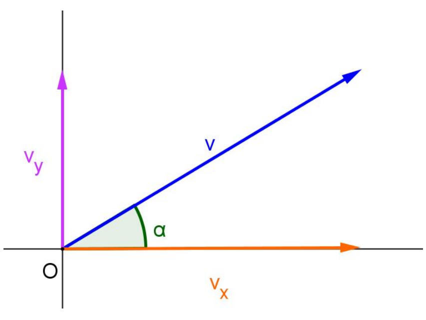
tg(α) = (cateto opposto all'angolo di α)/ cateto adiacente all'angolo di α

Posto che per risolvere un triangolo rettangolo basta conoscere due lati (il terzo si trova con Pitagora) o un lato e un angolo acuto (l'altro è retto e il terzo si trova per differenza), per **risolvere un triangolo rettangolo** si utilizzano le seguenti relazioni:



$$b^2 + c^2 = a^2 \qquad \beta = 90° - \gamma$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a} = \cos\gamma \qquad \cos\beta = \frac{c}{a} = \sin\gamma \qquad tg\beta = \frac{b}{c}$$



Queste relazioni, si possono utilizzare per risolvere problemi di vario tipo, e anche in **fisica**.

Dato infatti un vettore $\vec{v}$ come quello rappresentato in figura, per trovare il modulo delle componenti $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ si possono aplicare i risultati visti ora. In particolare sarà:

$\vec{v}_y = v \cdot \sin\alpha$ e $\vec{v}_x = v \cdot \cos\alpha$

---

[3]**N.B.** La scrittura "sen(α)" si legge "seno dell'angolo α", o "seno di α" e <u>non</u> "sen" *per* "α".

Il nome "seno" fu introdotto nel XII secolo da Roberto di Chester, studioso di opere arabe di astronomia e trigonometria, a causa di un errore di traduzione dovuto al fatto che nelle lingue semitiche non si indicano le vocali. La parola originaria per indicare il seno era "jiba" che significa "corda" (scoprirai più avanti la pertinenza di tale nome). R. di Chester la interpretò come "jiaib" che significa "baia", "insenatura" e la tradusse in latino con "sinus". Il coseno è il *complementi sinus*, come sancisce la **I** relazione fondamentale della trigonometria.

Per comprendere il significato del termine "tangente dell'angolo" bisogna riferirsi alla definizione di questa grandezza mediante la circonferenza goniometrica.