# Le attività “speciali” della matematica: DEFINIRE e DIMOSTRARE

Cominciamo da una domanda annosa: ***“La matematica insegna a ragionare?”***

**RISPOSTA1** **NO**: ciascuno di noi ragiona da sé già da piccolissimo; ognuno, spontaneamente, sa mettere in atto *inferenze*[1], che egli stesso, o chi lo circonda, sa riconoscere come errate o corrette alla luce dell’esperienza. Da **Jhon Henry Newman** [*Grammatica dell’assenso, in Opere,* Jaca Book-Morcelliana, Milano 1980, 159 ss]:

*“D’ordinario un ragionamento si formula nella nostra mente come un solo atto e non come una catena, una serie di atti. Apprendiamo la premessa, poi apprendiamo la conseguenza senza esplicitamente riconoscere il loro nesso, come per una spontanea e istantanea congruenza del primo e del secondo pensiero. Quasi per percezione istintiva procediamo da premessa a conclusione, […] ragioniamo senza sforzo o proposito, e senza che, di necessità, ci sia noto il percorso seguito dalla nostra mente nel procedere da premessa a conclusione.”*

Da **Laura Catastini** [Neuroscienze, apprendimento e didattica della matematica, http://www.mat.uniroma2.it/LMM/BCD/SSIS/Neurosc/Immersione/Immersione.htm]:

*“Esiste un momento importante nello svolgersi del nostro pensiero: quello in cui gli oggetti "in entrata" nel nostro sistema percettivo sotto forma di **parole** vengono rappresentati anche sotto forma di **immagine**. Il linguaggio naturale e il corrispondente contenuto immaginativo si creano "per **immersione**", cioè in momenti in cui sono contestualmente presenti alla percezione i fatti e gli oggetti cui le parole si riferiscono.*

*In tal modo la parola "martello", ad esempio, si correla all’azione, al materiale di cui è fatto, agli oggetti su cui si applica, al momento emotivo vissuto in concomitanza, a situazioni fisiche ed affettive. Questo corredo non verbale creerà poi associazioni fertili con altro materiale già presente alla mente, fornendoci rappresentazioni di quadri verbali più ricche del semplice contenuto del quadro stesso.*

*Faccio un esempio: se leggo "i fantini frustavano i cavalli fumanti nella pista gelida" posso "vedere" i cavalli sudati, dal momento che "fumano" nell’ambiente freddo, e certamente non penso i fantini a piedi, o in piedi sul cavallo, anche se nella frase questo particolare non è esplicitato.”*

**RISPOSTA2** **SÌ**: insegna il ragionamento logico-deduttivo; insegna - come ogni altra *praxeologia*[2] - a mettere assieme attività pratica (disegno, calcoli, ecc) ad attività teorica (i concetti e le immagini mentali connessi all’attività pratica che stiamo svolgendo); insegna a districarsi in sistemi di segni e significati lontani dall’esperienza personale; insegna a gestire catene di ragionamento lunghe[3]; insegna a gestire un linguaggio tecnico; insegna a integrare fra loro analisi e sintesi; insegna a *prendere coscienza* del proprio ragionamento, a riflettere sul pensiero per orientarlo e organizzarlo.

✘ La matematica, a parte poche cose di base, non ha niente di *spontaneo*, come lo è invece fare analogie e metafore: è una costruzione fatta a tavolino dall’essere umano – e continuamente rivista e riorganizzata - in migliaia e migliaia di anni. E in continua

---

[1] **DEF inferenza**: collegamento fra una premessa e una conseguenza.

[2] **DEF praxeologia**: Parola composta, derivata da: “praxis” - relativo alle pratiche, alle esperienze - e “logos” - ragionamento, organizzazione, discorso, astrazione.

[3] Studi sulle modalità di apprendimento umane sostengono che la memoria “di lavoro” (memoria non *a lungo termine*) riesca e memorizzare solo, al massimo, fra i 5 e i 7 *pacchetti* o anelli (riferendosi appunto ad una catena) di ragionamento alla volta. Pensa infatti alla modalità con cui memorizzi i numeri di cellulare: non impari i singoli numeri in sequenza ma li raggruppi in *pacchetti*, appunto e propendi per non più di quattro!

Una delle difficoltà che presenta la matematica, e uno degli aspetti sui quali può avere un’influenza positiva un’ adeguata frequentazione con la matematica, è proprio la gestione di catene di ragionamento di lunghezza superiore ai sette anelli. Di fronte a catene lunghe, se non allenati, anche se ciascun “passaggio del ragionamento” è elementare, il ragionamento viene infatti percepito come “difficile”: “ci si *perde*”.

Stesso tipo di problema si presenta d’innanzi alla comprensione di periodi articolati nel parlato: superate le quattro proposizioni, specialmente se subordinate, lo studente medio vacilla. Non è così?

evoluzione. E per svilupparlo servono circostanze speciali quali, per esempio, si incontrano nello studio della **geometria razionale** (o **euclidea**).

✘ Alcune operazioni logiche sono *naturali*, mentre **la logica** nel suo complesso si impara solo studiando e allenandosi duramente.

Da **Laura Catastini** [Neuroscienze, apprendimento e didattica della matematica, http://www.mat.uniroma2.it/LMM/BCD/SSIS/Neurosc/Immersione/Immersione.htm]:

*"...Se invece si legge: "il triangolo ABC ha i lati che misurano rispettivamente 3,4,5", in media, nessuno "vede" il triangolo come rettangolo, pur conoscendo il teorema di Pitagora.*

*C'è in questa situazione la stessa difficoltà a ritrovare forme consuete che si incontra a riconoscere una rosa nella descrizione del dottor P.:"Quindici centimetri circa di lunghezza....una forma rossa circonvoluta con un'appendice lineare verde".*

*"Poter parlare delle cose ma non vederle direttamente...."*

*Davanti alla matematica le persone si comportano come se fossero affette da questa patologia specifica, disperatamente attaccati a tutto quello che possa aiutare a ritrovare il mondo delle immagini, e con esso il senso della continuità e della familiarità di pensiero, senza però riuscire a trovare l'espediente giusto.*

*Ritengo allora che grande attenzione vada messa, nell'insegnamento della matematica, al momento della "**costruzione**" dei modelli mentali, termine che contrappongo a quello dell'immersione. Per costruzione intendo proprio la costruzione di un'immagine o modello mentale che sia isomorfo alla struttura semantica della frase matematica."*

In questo articolo reperibile on line, rivolto a insegnanti e perciò non semplice per voi, Laura Catastini fa riferimento all'importanza del linguaggio: del fatto che sia chiaro e comprensibile da parte di chi legge. All'importanza che linguaggio e immagini si corrispondano quanto più, in quest'opera di costruzione di una rete di significati non banale e non spontanea che è la matematica...

## *La matematica fa modelli*[4]

**Carlo Dapueto** *Progetto MaCoSa* Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova (nel Quaderno del CNR: "Definire, argomentare, dimostrare nel biennio e nel triennio")

"*Discipline* come la fisica, la linguistica, la storia, ... sono insiemi di conoscenze, di *modelli*, volti a *razionalizzare* (cioè a dare descrizioni e spiegazioni che siano chiare, ragionevoli, convincenti, coerenti,...) una certa area di fenomeni. Esse impiegano linguaggi specializzati, ricorrendo a termini specifici nuovi o tratti dal linguaggio comune ma intesi con significati nuovi o più ristretti, a eventuali simboli particolari, a termini specifici e simboli tratti da altre discipline. [...] MA non sono solo una collezione di *modelli*: [studiano anche le] caratteristiche generali che accomunano modelli diversi e i collegamenti fra un modello e l'altro [ES Meccanica e Termodinamica in fisica]"

"A differenza di quanto accade per le discipline umanistiche o sociali, che si occupano di fenomeni episodici o mutevoli o difficili da "misurare", nelle *scienze sperimentali* vengono studiati soprattutto fenomeni che si ripetono sistematicamente nel tempo; la differenza essenziale è, tuttavia, che la validità dei modelli deve essere sempre confermata (con un certo grado di approssimazione) da verifiche sperimentali accurate e/o dedotta da altri modelli con ragionamenti svolti in modo rigoroso, cioè con passaggi argomentativi che "non lascino ombre di dubbio"..." O almeno ci provino, con i mezzi di ragionamento che la nostra cultura ha eletto a più attendibili possibile.

[4] **DEF modello**: ricostruzione semplificata e artificiale di un problema reale, volta ad evidenziale unicamente gli aspetti ritenuti essenziali alla risoluzione del problema e le relazioni fra questi tralasciando ogni altro elemento che non risponda a tali requisiti. Un modello può essere di tipo materiale, la riproduzione in scala di un edificio, simbolico, la pianta dell'edificio, astratto, l'insieme dei calcolo necessari a costruire l'edificio, o una combinazione di tali aspetti.

"La *matematica*, come le altre discipline, si sviluppa attraverso la messa a punto di **modelli**, lo studio di collegamenti che esistono fra modelli diversi, la definizione di una nomenclatura e una simbologia specifica,… MA a differenza di esse, non si occupa di una specifica area di fenomeni: i suoi modelli vengono applicati alle situazioni più diverse, spesso i modelli delle altre discipline sono ottenuti come arricchimento di modelli matematici, … E *i modelli matematici* possono avere questa caratteristica di essere potenzialmente di *uso generale* in quanto vengono *definiti autonomamente, senza ricorrere a concetti e termini specifici e di altre discipline*".

La matematica ospita al suo interno due filoni distinti ma interdipendenti e strettamente intrecciati: la **matematica applicata**, che risponde all'esigenza di **risoluzione di problemi** concreti provenienti da ambiti esterni alla matematica stessa; e la **matematica pura**, che continua a crescere e svilupparsi a prescindere da applicazioni possibili, inventando nuovi modelli – oggetti + teoremi - che spesso vanno a risolvere nuovi problemi di cui non s'immaginava neanche l'esistenza, mentre si "giocava" con i modelli stessi!

## *La geometria razionale ovvero: definire e dimostrare*

La **geometria razionale** costituisce di fatto il primo **modello logico-deduttivo** consapevole dell'umanità. E' importante conoscerne la struttura in quanto a essa si rifanno gli altri modelli logico-deduttivi **interni** ma anche **esterni** alla matematica: a esempio Newton, rifacendosi a tale struttura, ha costruito il proprio modello fisico dell'Universo.

Quello che si studia a scuola non è il sistema originario di **Euclide**, ma la rivisitazione e riorganizzazione di questo operata da **David Hilbert** nel 1800.

La modellistica matematica si fonda su due caratteristiche essenziali (mi riferisco, per semplificare le cose, al *modello* di un **oggetto** concreto; lo chiameresti forse *modellino*):

- **idealizzazione**: ci si *allontana* dal singolo oggetto concreto per *conoscerlo meglio*: se ne ricercano elementi caratteristici e generali sia di tipo geometrico (ES forme) sia aritmetico (ES misure) con lo scopo di giungere all'*essenza* dell'oggetto stesso.
- **precisione**: perché l'astrazione continui a corrispondere all'oggetto di partenza dovrà registrare con estrema cura e precisione quelli che abbiamo chiamato elementi caratteristici dell'oggetto. Pensa ad esempio alla precisione necessaria per distinguere il modello di un DIARIO da quello *confondibile* di un LIBRO!

Mentre conosci già abbastanza bene quanto concerne l'idealizzazione in matematica, credo ti sia meno familiare in che modo si realizza la **precisione** in matematica. La ricerca della precisione si articola attraverso due attività: **DEFINIRE** e **DIMOSTRARE**.

**DEFINIRE** un **sostantivo**, **aggettivo** o **verbo** matematico (in una locuzione unica: un **OGGETTO MATEMATICO**) significa: illustrarne le caratteristiche essenziali e peculiari, gli aspetti che lo caratterizzano rendendolo quel che è, e differente da ciò che non è, utilizzando unicamente parole già definite[5] e il minor numero di parole possibili (c'è anche un'attenzione all'*eleganza*, oltre che all'*economicità*!).

**DEF** In tal modo s'innesca un *procedimento a ritroso*. In questo, si scopre presto di dover giungere all'individuazione di parole sulle quali basare la definizione di tutte le altre: **sostantivi**, **aggettivi** e **verbi FONDAMENTALI**.

Individuiamo in: **punto**, **retta**, **piano**[6], **insieme** i sostantivi fondamentali, e in: **appartenere**[7] (un punto ad una retta, una retta ad un piano, ecc.) e **essere coincidenti** (di figure) e effettuare un **movimento rigido**, i verbi fondamentali, su cui basare le definizioni.

Ogni **OGGETTO MATEMATICO** matematico va **definito** correttamente alfine di:

---

[5] Osserva invece come nelle definizioni del dizionario quest'accortezza non viene quasi mai seguita

[6] Ha senso considerarlo come elemento fondamentale se si fa la geometria dello spazio euclideo: nella geometria piana è "solo" il luogo ove vengono collocati gli altri oggetti matematici!

[7] O, specularmente, **passare per**; una retta per un punto, un piano per una retta, ecc…

- associare ad ogni parola l'esatto concetto corrispondente, quindi:
  - **nominare** (dare nome) ai nuovi oggetti che si incontrano
  - **comprendere meglio**[8] il significato delle parole matematiche
  - **sintetizzare**: la parola definita sostituisce la definizione
- poter **operare** correttamente con oggetti matematici: a esempio per risolvere un esercizio riguardante un *quadrato* devi conoscere tutte le caratteristiche del quadrato.
- cominciare ad effettuare le prime **deduzioni** sugli oggetti: pensa a come le proprietà delle potenze derivino quasi direttamente dalla definizione di potenza stessa

**DIMOSTRARE** (**DIM**) è un'attività che si riferisce a **proprietà** e **teoremi** riguardanti oggetti matematici Partiamo da alcuni esempi (**ES**): "**se** sommo le ampiezze degli angoli interni di un triangolo ottengo un angolo piatto", "**se e solo** se un quadrilatero è un rettangolo, le sue diagonali sono uguali e si bisecano scambievolmente in parti uguali", "**esiste** un solo punto che divide un segmento in due parti uguali".

Tutte queste frasi sono **teoremi** (**THM**). Nella prima si possono distinguere una premessa e una conseguenza: un'**ipotesi** (**HIP**) e una **tesi** (**TH**), già dalla costruzione della frase: **se**... **allora**...(allora è sottinteso); nella seconda quel "**se e solo se**" ci dice che ***ipotesi*** e ***tesi*** sono intercambiabili: ci sono due proposizioni in una[9]; nella terza l'***ipotesi*** è sottintesa: "dati un segmento e considerati gli infiniti punti ad esso appartenente...".

Vengono chiamate **proprietà** (**PROP**) quei *teoremi* che derivano quasi immediatamente dalla definizione come, le proprietà delle potenze o le proprietà di un triangolo isoscele.

A volte da un teorema o da una proposizione ne conseguono altri in modo così *immediato* da necessitare di dimostrazioni brevissime. Questi si chiamano **corollari** (**COR**).

**DEF:** **I teoremi** sono *proposizioni* da ***dimostrare***

Che vuol dire **dimostrare**? Vuol dire (**DEF**): costruire una *catena* di proposizioni una *conseguente* all'altra il cui *primo anello* sia l'**ipotesi** e l'*ultimo anello* sia la **tesi** e in cui gli *anelli intermedi* siano costituiti solamente da: teoremi già dimostrati, definizioni, passi di costruzione, postulati o assiomi (dirò fra breve di cosa si tratta).

La possibilità di passare da un anello all'anello successivo è stabilita da regole precise dette: *regole di derivazione logica* o *regole di inferenza*, la definizione delle quali esula dal livello di studio di un liceo ma che, viste in azione, nessuno di voi credo discuterà.

**DEF** Come il definire si basa su parole già definite, il dimostrare *si basa su proprietà già dimostrate*. Procedendo a ritroso, si giunge all'individuazione *proprietà fondamentali*: sulle quali basare la dimostrazione di tutte le altre: gli **assiomi** dell'uguaglianza e i **postulati geometrici**: Leggili alle pagg. 7-8.

✘ Teoremi, proprietà e corollari ampliano l'elenco delle caratteristiche degli *oggetti matematici* fornito dalle definizioni e danno indicazioni su cosa ***si può fare*** con questi. Postulati e assiomi svolgono lo stesso compito dei teoremi, ma in relazione agli *oggetti matematici fondamentali*.

✘ La dimostrazione di un teorema è l'attività matematica che maggiormente si lega alla **ricerca della precisione**: una dimostrazione infatti attesta che la proposizione contenuta nel teorema è una *conseguenza logica* dell'ipotesi, della premessa.

✘ Spesso la tesi è convincente in sé: ci dà un'informazione cui non abbiamo alcun problema a credere. La dimostrazione non serve infatti a convincerci della veridicità di una

---

[8] Associare ad ogni parola la corrispondente **immagine mentale** senza ambiguità, fornendo a un tempo gli strumenti per metterla in relazione con le altre immagini mentali *già formate*.

[9] "Se un quadrilatero è rettangolo, allora questo ha le diagonali uguali che..." ma anche: "Se le diagonali di un quadrilatero sono uguali e... allora questo è un rettangolo"

proposizione ma a garantire che si ***inserisca coerentemente*** all'interno del modello in cui è stata fatta. Cioè che non possano esserci due teoremi che giungono a conclusioni opposte che si possano dimostrare entrambi nello stesso modello!

- L'esigenza di "dimostrare tutto" è emersa infatti proprio in un momento storico, la fine del 1800, in cui alcune **teorie** (insieme di teoremi) sono entrate fortemente in crisi a causa dell'emergere di contraddizioni: la teoria degli insiemi, in particolare.

Sempre nello stesso periodo dall'ennesimo tentativo di dimostrare[10] il *postulato delle rette parallele* (**V Postulato**), sono nate nuove geometrie dette ***non euclidee***, anch'esse *logicamente valide*, cioè coerenti, che hanno rivoluzionato la concezione della matematica.

Una di queste, la **geometria ellittica di Riemann** è molto semplice da comprendere nelle sue linee base: gli **elementi fondamentali** sono: il punto, la superficie sferica (modello della superficie terrestre!) e i cerchi massimi (i meridiani!). Converrai che in questa geometria non esistono rette parallele: tutte le rette si incontrano infatti ai Poli...

Questi sconvolgimenti hanno portato i matematici ad esercitare, per le costruzioni matematiche successive, un controllo ferreo mediante dimostrazioni rigorose.

- Infine, ma non meno importante, una dimostrazione ci informa sulle **connessioni** esistenti fra la proposizione dimostrata e le altre proposizioni contenute all'interno del modello, quindi sulle conseguenze che tale affermazione potrà avere e quindi anche sui teoremi che da essa potranno derivare.

**Lo schema seguente riassume quanto detto fin qui:**

**OGGETTI fondamentali**

(punto, retta, piano, insieme – continuità - appartenenza, incidenza, congruenza, ordine)

hanno le seguenti proprietà: →

**Postulati e Assiomi**

(Sono gli anelli fondamentali delle catene dimostrative dei primi teoremi)

↓ servono per:

**DEFINIRE**

(precisare le caratteristiche peculiari di cui vorremmo che godano gli oggetti, utilizzando parole **già definite**)

↓ servono per:

**DIMOSTRARE**

(Costruire catene di proposizioni, ciascuna già dimostrata e ***conseguenti*** le une alle altre, che abbia come primo anello l'ipotesi e come ultimo la tesi e come anelli intermedi postulati, assiomi o teoremi già dimostrati)

↓ cosa

**OGGETTI**

**SOSTANTIVI** (poligoni, angoli, ecc), **AGGETTIVI** (uguaglianza, similitudine, equivalenza, ecc...) e **VERBI** (addizionare, sottrarre, trasformare, ecc)

↓ cosa:

**TEOREMI**

(proprietà degli oggetti matematici. Sono composti di una premessa, o ipotesi, e di una conclusione, o tesi)

← riguardano

[10] Tentativo intrapreso per primo dallo stesso Euclide che lo considerava troppo articolato per essere considerato un vero e proprio postulato e proseguito dai maggiori matematici di tutte le epoche, senza successo.

## *ES di DEF: il Poligono - ASSIOMI e POSTULATI - ES di DIM: THM di Pitagora*

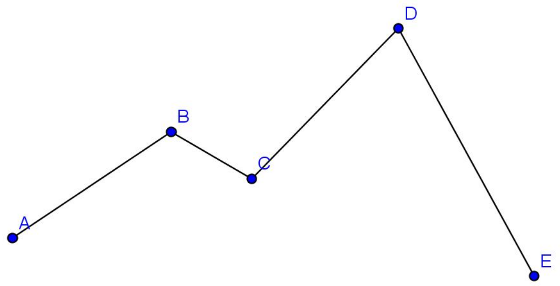
**DEF** Dati due punti distinti A e B di una retta ***r*** si dice **segmento** AB il sottoinsieme continuo di *r* costituito da A, B e dai punti compresi fra A e B. A e B si dicono *estremi* di AB

**DEF** dato un insieme **A** (gli insiemi si indicano con lettere in corsivo maiuscolo) diremo che l'insieme **B** è **sottoinsieme** di **A** e lo indicheremo con il simbolo **B**$\subseteq$**A** se ogni elemento di **B** è anche elemento di **A**. In simboli: $\forall b \in B \Rightarrow b \in A$. Se esiste un elemento di **A** che non è elemento di **B** (in simboli: $\exists a \in A, a \notin B$) si dirà che **B** è un **sottoinsieme proprio** ed il simbolo più appropriato sarà: $\subset$ (ma utilizzare l'altro non costituisce errore). Ovviamente in caso contrario **B** coincide con **A**.

**DEF** Due **segmenti** che hanno in comune un estremo e solo quello si dicono **consecutivi** (sa hanno in comune oltre all'estremo un altro punto saranno coincidenti)

**DEF** Due **segmenti** *consecutivi* che appartengono alla stessa retta si dicono **adiacenti**

**DEF** Più segmenti a due a due consecutivi e non adiacenti costituiscono una **poligonale**




**DEF** I segmenti AB, BC, CD DE si dicono **lati** ed i punti A, B, C, D, E i **vertici** della poligonale. In particolare i vertici A ed E, che appartengono a singoli segmenti: non sono in comune, sono gli **estremi** della poligonale. Se gli estremi coincidono la **poligonale** si dice **chiusa**, se sono distinti **aperta**. Quando due lati non consecutivi hanno un punto in comune, non gli estremi della poligonale, la poligonale si dice **intrecciata**.

**DEF** Un sottoinsieme del piano cartesiano viene chiamato **figura piana**

**DEF Poligono** è una *figura piana continua* delimitata da una poligonale chiusa non intrecciata.

**DEF** Due figure si dicono **congruenti**[11] quando con un movimento rigido è possibile portare una di esse a *coincidere punto per punto con l'altra*.

### Assiomi dell'uguaglianza

Per l'uguaglianza valgono le seguenti proprietà (valide anche per: parallelismo, congruenza e equivalenza: prova a sostituire al simbolo di = ciascuno dei precedenti e vedrai)

Proprietà **riflessiva** (nel senso dello specchio): per ogni elemento A vale cioè A=A

Proprietà **simmetrica** (importante per le equazioni): se è vero A=B allora è vero anche: B=A

Proprietà **transitiva** : se A=B e B=C allora anche: A=C

E la proprietà **invariantiva** (importantissima per risolvere le equazioni e valida solo dove abbia senso definire addizione e sottrazione, quindi non il parallelismo)

Data un'uguaglianza vera: A=B saranno vere anche le seguenti eguaglianze che saranno dette equivalenti ad A=B:

A+C=B+C ; A-C=B-C ; AC=BC ; $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$

Per convincertene pensa l'uguaglianza come l'equilibrio di una bilancia a due piatti.

### Postulati della geometria piana

**I postulato** Dati due punti distinti A e B, esiste una ed una sola retta passante per essi

[11] Assumiamo la convenzione che una figura sia uguale solo a sé stessa

**Cor** Due rette distinte non possono avere più di un punto in comune

**II postulato** Ogni retta *r* è un insieme *continuo* e *ordinato*[12] di punti. Tale che[13]:

- presi su *r* due punti distinti A e B esiste sempre un punto C di *r* fra essi compreso (ES: se A < B allora sarà A < C < B)
- preso su *r* un punto C, esisteranno sempre due punti A e B di r fra i quali C è compreso.

**Cor 1** Fra due punti A e B di *r* sono compresi infiniti punti appartenenti ad *r*

**Cor 2** Ogni punto C di una retta *r* è preceduto e seguito da infiniti punti di *r*

**Cor 3** Ogni retta è un insieme infinito di punti

**III postulato** Dato un punto P del piano, esistono rette che non lo contengono

**Cor 1** Esistono infinite terne di punti non allineati

**Cor 2** per ogni punto passano infinite rette

**Cor 3** Esistono infiniti punti non appartenenti ad un'assegnata retta *r*

**IV postulato** Date due rette orientate *r* ed *s* e due loro punti A (di *r*) e B (di *s*) esistono due movimenti rigidi che portano *r* a coincidere con *s*, con A su B: l'uno fa coincidere le due orientazioni, l'altro le dispone in senso opposto.

**Cor** Tutte le rette sono uguali

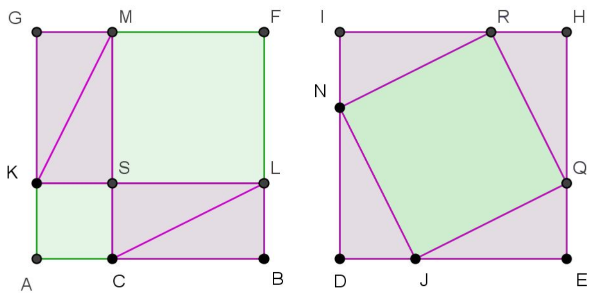
**V postulato** Data una retta ***r*** ed un punto P esterno ad essa esiste una ed una sola retta ***s*** passante per P e non avente nessun punto in comune con la retta ***s***

**DEF** Due **rette** del piano si dicono **parallele** se coincidono oppure se non hanno nessun punto in comune

**Cor** Data una retta *r* ed un punto P del piano (appartenente o no ad *r*), per P si può condurre una ed una sola retta *s* parallela ad *r*

**Teorema di Pitagora**: "*In un triangolo rettangolo* (HIP), il quadrato costruito sull'ipotenusa è **equivalente** (stessa area) alla somma dei quadrati costruiti sui cateti (TH)".

L'enunciato di questo teorema, come di quasi tutti i teoremi geometrici, può essere *affiancato* da un disegno. Misura la lunghezza dei cateti GM GK del disegno seguente e disegna un triangolo rettangolo ABC congruente a GKM sul quale **rappresenta il teorema.**




Il quadrato costruito sul cateto minore dovrà essere congruente a ACSK, il quadrato costruito sul cateto maggiore dovrà essere congruente a SLFM ed il quadrato costruito sull'ipotenusa dovrà essere congruente a JQRN.

**DIM** I quadrati ABFG e DEHI sono congruenti → Il quadrato JQRN si può ottenere sottraendo da DEHI 4 triangoli tutti congruenti al triangolo ABC → Ma anche la somma fra i quadrati ACSK e SLFM si può ottenere sottraendo da ABFG, congruente a DEHI, 4 triangoli congruenti ad ABC. → Dalla **proprietà invariantiva** dell'uguaglianza (o dell'equivalenza) la tesi: $A_{JQRN} = A_{ACSK} + A_{SLFM}$ (o: JQRN ≡ ACSK+SLFM attenzione ai simboli!).

In che modo viene utilizzata l'ipotesi che dovrebbe essere il *primo anello della catena dimostrativa*? Proprio per i disegni qui sopra: se ABC non fosse rettangolo potresti farli?

[12] Dati due punti distinti A e B di essi si può individuare quale precede l'altro: o A < B o A > B.

[13] Segue DEF della ***densità*** di *r* che è un concetto *più debole* della continuità ma più facile da definire