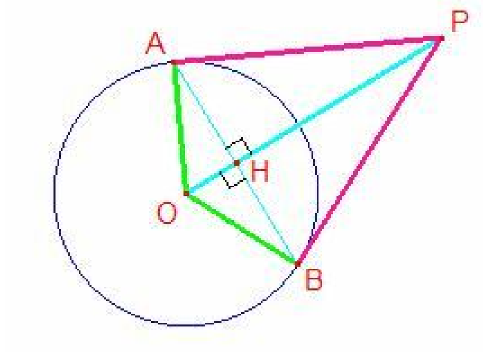
Un esercizio inerente triangoli rettangoli con angolo acuto di 30°, 45° o 60° e il teorema della tangente da punto esterno



THM della tangente da punto esterno: *I segmenti di tangente condotti da un punto esterno a una circonferenza*, e compresi tra tale punto e quelli di contatto (AP e BP, in figura), sono **congruenti**. La semiretta (PO) che congiunge il punto (P) da cui escono le tangenti con il centro della circonferenza (O) è bisettrice sia dell'angolo formato dalle tangenti (APB), sia dell'angolo formato dai raggi che vanno ai punti di contatto (AOB) ed è inoltre asse del segmento (AB) che unisce i detti punti di contatto.

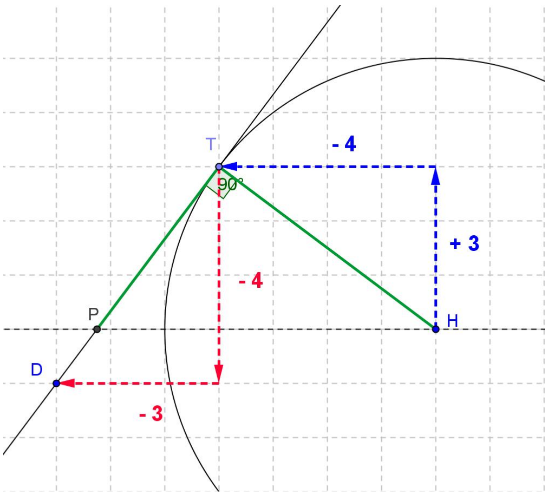
DIM In una circonferenza ciascun raggio è perpendicolare alla retta tangente alla circonferenza nell'**estremo libero**[1] del raggio.

Perciò i triangoli **OAP** e **OBP** sono **rettangoli** rispettivamente in **A** e **B**. Avendo l'ipotenusa **OP** in comune e i cateti **OA** e **OB** congruenti, in quanto entrambi raggi, i triangoli **OAP** e **OBP** sono congruenti. Hanno perciò tutti gli elementi corrispondenti congruenti. In particolare: $A\hat{O}P \cong P\hat{O}B$; $A\hat{P}O \cong B\hat{P}O$ e ciò equivale a dire che **OP** è **bisettrice** sia di **AOB** che di **APB**.

Il fatto che $AP \cong BP$ lo utilizziamo per dimostrare che la retta **OP** è **asse** del segmento **AB**. Ricordando la ***definizione** di asse di un segmento come **luogo** dei punti equidistanti dagli estremi del segmento*, osserviamo infatti che sia O che P – estremi di OP – sono *equidistanti* da A e B. Devono perciò appartenere all'asse di **AB**, così come tutti i punti del segmento OP.

Come si può fare un disegno come quello in figura? Con **Geogebra** ti basterebbe tracciare una circonferenza di centro dato (**O**), marcare un punto sulla circonferenza (**A**) e tracciare il raggio che ha per estremo libero questo punto (**OA**). Tracciare la retta *perpendicolare al raggio* e passante per **A**.

Su questa retta marcare un punto (**P**) e congiungerlo con il centro con un segmento (**OP**). Marcare il simmetrico di **A** rispetto al segmento **OP** (**B**) e congiungere con segmenti consecutivi i punti O, B, P e A; e poi A con B. Marcare il punto **H** d'intersezione fra **OP** e **AB**.

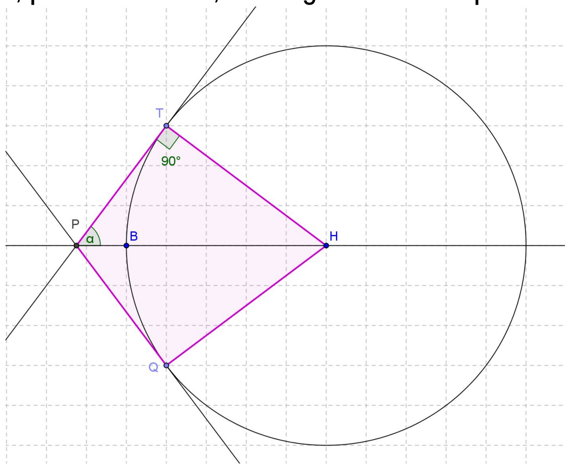


Con carta, riga, matita e compasso, puoi seguire la seguente costruzione: traccia una circonferenza di 5 quadretti (o multipli). A partire dal centro H traccia il segmento **TH** di pendenza $-\frac{3}{4}$: da H "sali" di 3 quadretti (Δy = +3) e "vai a sinistra" di 4 quadretti (Δx = -4). $m_{TH} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+3}{-4} = -\frac{3}{4}$.

La tangente alla circonferenza in **T** è *perpendicolare* a **TH**, perciò deve avere pendenza $+\frac{4}{3}$ (l'opposto dell'inverso della pendenza di **TH**). Per disegnare questa perpendicolare a **TH** puoi scegliere due strade. Io sono "scesa" di 4 quadretti (Δy = - 4) e sono "andata a sinistra" di 3 quadretti (Δx = - 3). $m_{TD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{-3} = +\frac{4}{3}$. Ho determinato **P** come punto d'intersezione fra la retta **TD** e la *retta tratteggiata* passante per **H** che segue la linea dei quadretti.

[1]**DEF** Come ogni segmento, un raggio è individuato dai suoi estremi. Uno degli estremi di un raggio sarà sempre il centro della circonferenza e l'altro un punto della circonferenza. Quest'ultimo si chiama **estremo libero del raggio**.

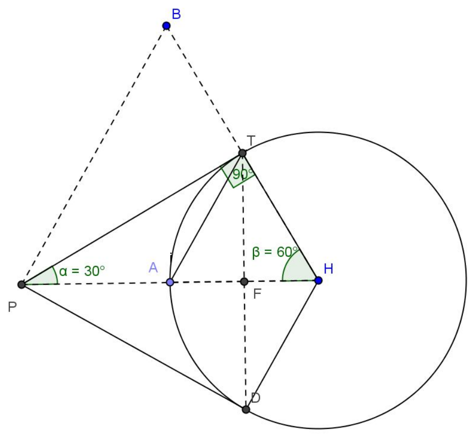
Completando, per simmetria, il disegno otterrai qualcosa del genere:



<u>**ESERCIZIO**</u>: trova perimetro e l'area del deltoide rettangolo **PTHQ** - i cui lati corrispondono ai due segmenti di tangenti alla circonferenza: **PT** e **PQ**, e ai due raggi: **HT** e **HQ** - supponendo di conoscere la misura ***r*** del raggio, e la misura ***α*** dell'angolo **HPT**, nei casi in cui:

1) α= 30° ; ***2)*** α = 45° ; ***3)*** α = 60° ; ***4)*** α non specificato: caso generale

1) α = 30°



Se α = 30°, allora l'angolo **PHT** = β = 60°. Come si fa a fare un disegno preciso che rappresenti il problema? Se riusciamo a stabilire in che **posizione** mettere il punto **T** è poi abbastanza semplice procedere poiché **PTH** è un triangolo rettangolo speciale: è la metà di un triangolo equilatero (**PHB**) di lato **2*r*** (BH = 2 TH).

La posizione di **T** ci serve per avere il secondo lato dell'angolo **β** (del primo lato è facile tracciare **PH** = 2·**AH**).

Per fissare **T** osserva che il triangolo **ATH** è *isoscele* perché $AH \cong HT$ in quanto raggi. Perciò $A\hat{T}H \cong H\hat{T}A$. Ma $A\hat{T}H + H\hat{T}A = 180° - 60° = 120°$ da cui: $A\hat{T}H = 60° = T\hat{H}A = T\hat{A}H$.

Il triangolo **ATH** è dunque *più che isoscele*: è **equilatero**. Perciò <u>ogni mediana è anche altezza e bisettrice</u>. Sfruttiamo questo risultato per effettuare il disegno a partire dal raggio **AH**: tracciamo l'asse di **AH** e chiamiamo **T** e **Q** i punti d'intersezione dell'***asse** di AH* con la circonferenza.

Dovendo trovare il perimetro di **PTHQ** è necessario determinare la misura di uno dei due segmenti di tangente, **PT** o **PQ** (che sono congruenti). Gli altri 2 lati del quadrilatero (**TH** e **HQ**) corrispondono a raggi.

Per trovare la misura del lato **PT**, lo consideriamo come <u>**altezza**</u> del **triangolo equilatero PHB** che ha per <u>**lato**</u> **PH**. Possiamo trovare **PT** ricordando la seguente *relazione che lega altezza e lato di un triangolo equilatero*:

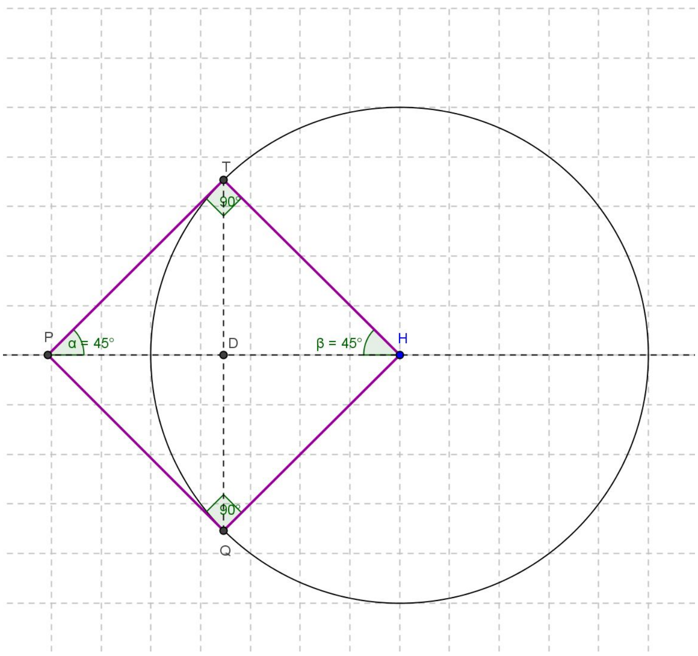
$h = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3} = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ **PT**= √3/2 **PH** = √3/~~2~~ (~~2~~·***r***) = √3·***r***. Ora possiamo calcolare la misura del **perimetro**:

$$2p_{PTHQ} = 2 \cdot \overline{PQ} + 2 \cdot \overline{QH} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r + 2 \cdot r = 2r \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

Per calcolare l'**area** del quadrilatero **PTHQ** si può calcolare il doppio dell'area di uno dei triangoli congruenti **PTH** e **PQH**. Per esempio, utilizzando i due cateti come base e altezza:

$$A_{PTHQ} = 2 \cdot A_{PTH} = \cancel{2} \cdot \frac{\overline{TH} \cdot \overline{TP}}{\cancel{2}} = r \cdot r\sqrt{3} = r^2 \cdot \sqrt{3}$$

2) α = 45°



Se **α =** 45° , β = 45°. E il quadrilatero **PTHQ** è un quadrato (l'unico quadrilatero ad avere tutti e quattro gli angoli di 90° e due lati consecutivi congruenti: **TH** e **HQ**) di lato ***r***.

Per effettuare un disegno rappresentativo della situazione, si comincia con il tracciare i segmenti **TH** e **HQ** seguendo la diagonale dei quadretti.

A questo punto si può sfruttare il fatto che le **diagonali** di un quadrato sono *perpendicolari e si bisecano in parti uguali*.

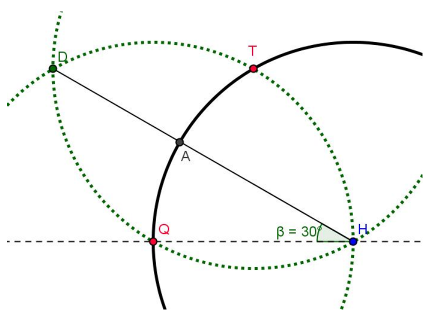
IL segmento **TQ** taglia la retta per H che "segue la linea dei quadretti" in direzione orizzontale, nel punto D che è punto medio di TQ in ogni caso mentre, solo per questo valore di **α** , è punto medio anche di **PH**.

Raddoppiando **HD** si ottiene pertanto la posizione di **P** (che non è all'incrocio esatto di linee di quadretti, perché **PH** misura, nel mio disegno, $5 \cdot \sqrt{2}$ (in generale: $r \cdot \sqrt{2}$) , che è un **numero irrazionale**.

Il disegno può essere effettuato anche in maniera più semplice: tracciando due raggi perpendicolari **HQ** e **HT** che seguono le linee dei quadretti. Poi, partendo dai punti **T** e **Q**, due segmenti paralleli ai 2 raggi che s'incontreranno nel punto **P** (il punto esterno da dove partono i segmenti di tangente **PQ** e a **PT**). Fallo da te.

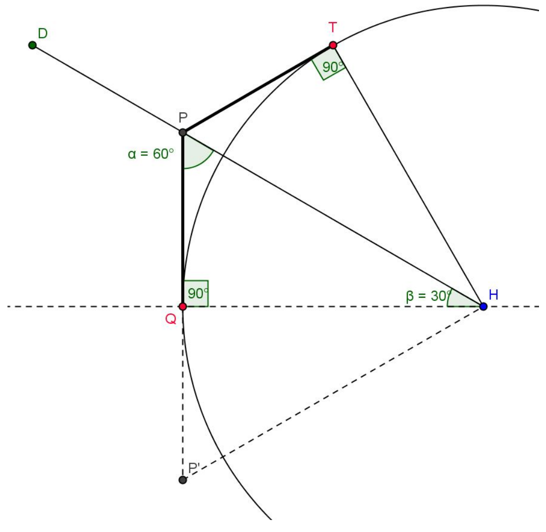
Ciò premesso l'esercizio è banale: $2p_{PQHT} = 4r$; $A_{PQHT} = r^2$.

3) α = 60°



Tracciare il disegno in questo caso non è banale. Si deve infatti procedere alla costruzione mostrata nelle figure. Chiamerò la circonferenza di centro ***H*** e raggio ***r*** : **Γ** (gamma).

1) Traccia la retta orizzontale per H che segue la linea dei quadretti. Nomina **Q** il punto d'intersezione di tale retta con la circonferenza **Γ** .
2) Punta in **Q** con apertura uguale ad r e traccia una semicirconferenza . Nomina **T** il punto d'intersezione fra tale semicirconferenza e **Γ**.
3) Punta in **T** con apertura uguale a **r** e traccia una semicirconferenza passante per Q.
4) Il punto d'intersezione fra le due semicirconferenze ai punti 2 e 3, esterno a Γ , nominalo **D**.
5) Congiungi **D** con **H**. L'angolo **DHQ** misurerà 30°. Perché? Perché i punti **Q**, **H** e **T** sono i vertici del **triangolo equilatero THQ** e il segmento **DH** sta sull'asse del lato **TQ** e perciò è anche **bisettrice** dell'angolo **QHT** che misura 60°. Gli angoli **DHQ** e **DHT** sono **congruenti** e misurano 30°.
6) (Figura a destra) Traccia, seguendo le linee dei quadretti, la perpendicolare per **Q** al segmento **HQ** e nomina **P** il punto d'intersezione tra tale retta e il segmento **DH**.
7) **PQ** è tangente in **Q** a **Γ** e PT è tangente in **T** a **Γ** (sai dimostrare quest'ultimo fatto da te?).



Hai così tracciato il quadrilatero **PTHQ** nel caso in cui α = 60°. Come puoi vedere dal disegno, il triangolo **PQH** è *metà di un triangolo equilatero di altezza **QH*** (che misura ***r***). Completa l'esercizio tu.