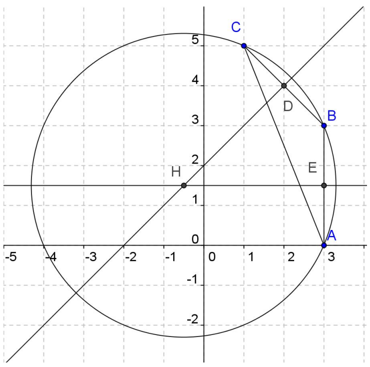
Condizioni per determinare l'equazione di una circonferenza della quale conosco le coordinate di tre punti

Premessa: per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza

Metodo geometrico

Per ricavare l'equazione di una circonferenza conoscendo le coordinate di tre punti (**esercizi svolti** ne trovi TANTI sul libro e anche a pag 2) ti può servire il seguente **Teorema**[1]:

THM_1 Dato un **triangolo inscritto**[2] in una **circonferenza**, il **centro** della **circonferenza** è il <u>punto d'**intersezione degli assi**</u>[3] dei lati del triangolo[4].



Prendiamo tre punti non allineati e uniamoli a formare un triangolo: ABC.

Tracciamo gli assi dei segmenti **AB** e **BC**.[5] Il **THM_1** afferma che il punto in cui si intersecano sarà il centro della circonferenza passante per A, B e C. Nel disegno qui a fianco il centro è il punto **H**.

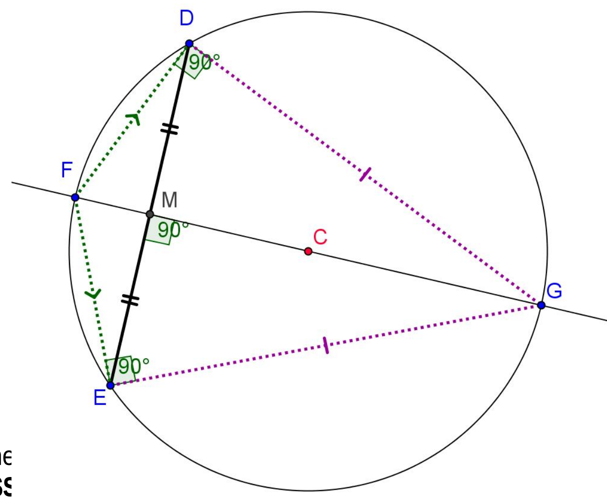
E è **punto medio** del segmento **AB**, **D** è **punto medio** del segmento **BC**. Le per **E** e **D** sono **perpendicolari**, rispettivamente, ad **AB** e **BC**.

OSS I **lati** del **triangolo inscritto** posso anche considerarli (*ricentramento cognitivo*) come **CORDE** della circonferenza.

Dimostrare **THM1** <u>equivale</u> a dimostrare che: (**THM_2**) in una circonferenza l'**asse** di *ciascuna* corda *passa per il* **centro** della circonferenza stessa.

Per **DIMOSTRARE** questo **THM_2** dobbiamo conoscere questi altri teoremi:

THM_2.1 **Condizione necessaria e sufficiente**[6] **(CNS)** affinché un **triangolo** sia **inscrivibile** in una **semicirconferenza** (cioè abbia i vertici sulla circonferenza e un <u>lato coincidente con il diametro della circonferenza</u>) è che sia un **triangolo rettangolo**.



THM_2.2 CNS affinché un **quadrilatero** sia **inscrivibile** in una **circonferenza** è che la <u>somma dei suoi angoli opposti dia un angolo piatto.</u>

THM_2.3 CNS affinché un **triangolo** sia **isoscele** è che l'<u>altezza</u> relativa alla base <u>sia anche mediana</u> (e bisettrice, ma non ci serve).

---

[1] **Legenda**: **THM** è l'abbreviazione di TEOREMA; **DEF** l'abbreviazione
Necessaria e Sufficiente (altro modo di indicarla: **SSE** cioè Se e Solo Se); **OSS**

[2] **DEF** Un **triangolo** si dice **inscritto** in una **circonferenza** se i suoi vertici sono punti della circonferenza.

[3] **DEF** Si dice **asse di un segmento** quella retta *perpendicolare* al segmento e passante per il suo *punto medio.*

[4] **DEF** Tale punto si chiama **CIRCOCENTRO**, cioè CENTRO della CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA. Se un triangolo è inscritto in una certa circonferenza allora quella circonferenza è circoscritta al triangolo!

[5] Si dimostra che l'asse del segmento **AC** intersecherà gli assi di **AB** e **BC** nello stesso punto in cui s'intersecano loro.

[6] Un teorema è una **CNS** quando ipotesi e testi sno intercambiabili: due teoremi in uno. ES: THM_2.1 "al dritto": *se un triangolo è inscrivibile in una circonferenza allora è rettangolo*; THM_2.1 "al rovescio": *se un triangolo è rettangolo allora è inscrivibile in una circonferenza*. Sono due proposizioni entrambe VERE, perciò possono essere enunciate anteponendo loro la dicitura: "CNS afficnhé…". CONTRES: Se due angoli sono opposti al vertice, allora sono congruenti. Non è invece semrpe vero il contrario: se due angoli sono congruenti allora sono opposti al vertice!

DIM Per **definizione di asse** il segmento **FG** è perpendicolare alla corda ED e la divide in due parti uguali. Perciò i segmenti **FM** e **MG**, sono **altezze e mediane** dei *triangoli* **EDF** e **EDG**, i quali triangoli, per il **THM_2.3** (utilizzato nella sua versione "al rovescio", lo vedi?), sono **isosceli**.

Il quadrilatero che ha i lati a consecutivi congruenti due a due è il deltoide. Da quanto abbiamo appena dimostrato sui triangoli EDF e EDG, **EGDF** è un *deltoide*.

Una caratteristica di un deltoide è avere due angoli opposti congruenti. In questo caso perciò quindi gli *angoli* **FEG** e **GDF** sono **congruenti**.

Per il **THM_2.2** (utilizzato "al dritto"), la somma degli angoli **FED** e **GDF** è un **angolo piatto**.

Se due angoli sono congruenti e la loro somma è un angolo piatto, ciascuno dei due è un angolo retto. Perciò, i triangoli **FEG** e GDF, sono entrambi **rettangoli** e, per il **THM_2.1** (utilizzato "al rovescio"), il segmento **FG** è un **diametro** equindi ***passa*** *per il* **centro C**. ***cvd***

Metodo algebrico

Adesso vediamo come arrivare all'**equazione canonica** della circonferenza partendo dalle **coordinate** dei 3 punti: **A**, **B** e **C** servendoci dell'**algebra** invece che della **geometria**.

Il metodo algebrico si basa essenzialmente sul seguente **principio** IMPORTANTISSIMO:

CNS *affinché un* ***punto appartenga*** *a una certa* ***curva*** *è che le* ***coordinate*** *del* ***punto verifichino*** *l'****equazione rappresentativa*** *di tale curva.*

Voler **determinare l'equazione canonica** di una certa circonferenza significa voler determinare il **valore numerico** dei **parametri *a*, *b*, *c*** che compaiono nell'equazione.

Se vogliamo l'**equazione** della circonferenza passante per **A**, **B** e **C**, sostituiamo le coordinate di questi punti, alle corrispondenti *variabili* (*l'ascissa* di ciascun punto al posto della ***x*** e *l'ordinata* di ciascun punto al posto della ***y***) dell'equazione generica: $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Otterremo così **tre** uguaglianze vere contemporaneamente (perché i punti appartengono alla stessa circonferenza!).

In queste uguaglianze VERE non conosciamo: i valori di ***a***, ***b***, ***c*** che sono perciò tre *incognite*.

Ricapitolando: abbiamo tre uguaglianze - contenenti ciascuna tre grandezze incognite - che vogliamo siano **vere contemporaneamente**. L'esponente delle tre incognite è 1.

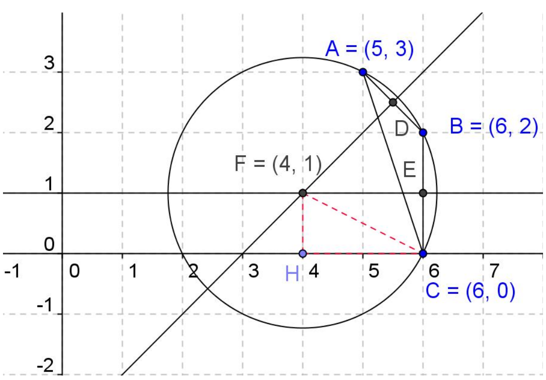
In *matematichese* significa che abbiamo un: sistema lineare di tre equazioni in tre incognite.

La *risoluzione* di questo sistema (consigliata la risoluzione per *riduzione*), ci consentirà di attribuire valori numerici a ***a***, ***b***, ***c*** e quindi ottenere l'equazione che volevamo.

Anche in questo caso ci sono molti **ESEMPI SVOLTI** sul libro (da studiare! Cioè provare a risolvere sbirciando la soluzione proposta soltanto se e quando si hanno dei dubbi).

ESEMPIO SVOLTO e commentato

Metodo geometrico Supponiamo le coordinate dei punti siano: **A**(5;3); **B**(6;2); **C**(6;0).



Tracciando gli **assi** dei segmenti **AB** e **BC** scopriamo che la loro intersezione, cioè il centro della circonferenza, è il punto **F**(4;1). Il disegno è affidabile perché la pendenza del segmento **AB** è -1 e perciò quella del suo asse è +1, mentre l'asse del segmento **BC** è parallelo all'adx. Non ci sono dubbi che F sia il punto d'intersezione cercato.

Per determinare la misura del raggio basterà ricordare che tutti i punti della circonferenza hanno distanza dal centro che è uguale alla misura del raggio. Per esempio potremo calcolare la misura del segmento **FC** osservando il triangolo rettangolo FHC: $r=\overline{FC}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

Ora che il centro **F**(4;1) e $r=\sqrt{5}$ possiamo otterremo l'equazione canonica applicando la definizione di circonferenza e svolgendo i conti:

$$(x-4)^2+(y-1)^2=5\Rightarrow x^2-8x+16+y^2-2y+1-5=0\Rightarrow x^2+y^2-8x-2y+12=0$$

OSS: c>0 e infatti **O** è un punto *esterno* alla cerchio. Osservando l'equazione ricaviamo che: ***a***=-8, ***b***=-2, ***c***=12 e deve tornarci anche con l'altro metodo.

Metodo algebrico Nell'equazione generica: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ sostituiamo le coordinate dei punti **A**, **B** e **C** in ogni occorrenza di ***x*** e ***y*** :

(A) → $5^2+3^2+5a+3b+c=0$

(B) → $6^2+2^2+6a+2b+c=0$

(C) → $6^2+0^2+6a+0b+c=0$ ← $y_C = 0$ quindi $0\cdot b=0$ e perciò non compare nessun termine in ***b***.

Adesso racchiudiamo queste 3 equazioni in un unico **sistema**. Sviluppando i quadrati si ha:

$$\begin{cases}25+9+5a+3b+c=0\\36+4+6a+2b+c=0\\36+\quad 6a+\quad +c=0\end{cases}$$

Riordiniamo le equazioni spostando i valori con le incognite a sinistra dell'*uguale* e i valori senza incognite (**termini noti**) a destra *dell'uguale*:

$$\begin{cases}5a+3b+c=-34\\6a+2b+c=-40\\6a+c=-36\end{cases}$$

Adesso dobbiamo determinare i valori numerici di ***a***, ***b***, ***c***. La terza equazione ha solo due incognite, quindi potresti **esplicitare** una delle due. In questo specifico esercizio è molto comodo. Ma vediamo come operare nel caso più GENERALE possibile: diamo un procedimento sempre efficace.

Sottraendo membro a membro prima e seconda equazione, e seconda e terza, poiché c viene SEMPRE semplificato, ti troverai un sistema RIDOTTO: di due equazioni in due incognite. Più facile da risolvere di un sistema di tre equazioni in tre incognite...

$$\begin{cases}5a+3b+c-6a-2b-c=-34-(-40)\\6a+2b+c-6a-c=-40-(-36)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+b=6\\2b=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b-6\\b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-8\\b=-2\end{cases}$$

Infine sostituiamo il valore di ***a*** nella terza equazione e troviamo ***c***. ***c***=-6(-8)-36 → ***c***=48-36=12

Questo esercizio è molto facile perché, nell'ultima equazione, b=0. Ma la procedura indicata è OTTIMA per ogni tipo di caso. Ci saranno solo alcuni passaggi di calcolo in più nella risoluzione del sistema RIDOTTO.

Adesso, per scrivere l'**equazione canonica** della circonferenza, basta sostituire all'equazione generica, al posto ***a***, ***b*** e ***c*** i valori numerici che abbiamo trovato: $x^2+y^2-8x-2y+12=0$. *Non avento commesso errori di calcolo, il risutlato collima con quello ottenuto con il metodo geometrico. cvd!*

Per trovare le coordinate del centro, applichiamo le relazioni già studiate: $x_0=\frac{a}{-2}=\frac{-8}{-2}=4$; $y_0=\frac{b}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$. Quindi, come centro, ci torna il punto **F** (4;1).

Per trovare ***r*** appplichiamo quello che sappiamo: $r=\sqrt{x_0^2+y_0^2-c}=\sqrt{4^2+1^2-12}=\sqrt{16+1-12}=\sqrt{5}$.

Ovviamente ci tornano gli stessi risultati ottenuti con il ***metodo geometrico***.