# Alcuni esercizi sulla circonferenza

Su questa scheda presenterò alcuni esercizi riguardanti le circonferenze che spero chiariscano la parte teorica

**Esercizio** : ***Date le seguenti equazioni, in forma canonica, trova il centro* C *e il raggio r delle circonferenze corrispondenti e disegnale.***

1. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 3x + y + 7/2 = 0$
5. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$
6. $x^2 + y^2 + 5x - 4y + 4$
7. $x^2 + y^2 - 3x + 5y = 0$
8. $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0$

***Ricorda:***

***equazione canonica:*** $x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ **; C($x_0$;$y_0$);** $x_0 = -\frac{a}{2}; y_0 = -\frac{b}{2}; r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c}$

Risolverò ciascun esercizio sfruttando le relazioni fra ***a, b, c***, $x_0$, $y_0$ e ***r***, richiamate sopra e poi utilizzando anche il metodo di completamento dei quadrati, spiegando i passaggi che seguo per chiarire meglio le idee

## 1-Circonferenza con centro *sull'**adx***

**ES** $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$    Riconoscendo che: ***a***= -2, ***b***= 0e ***c***=-3, si ha:

$x_0 = -(-2)/2 = 1$ ; $y_0 = 0$ ; $r = \sqrt{1+0-(-3)} = \sqrt{4} = 2$

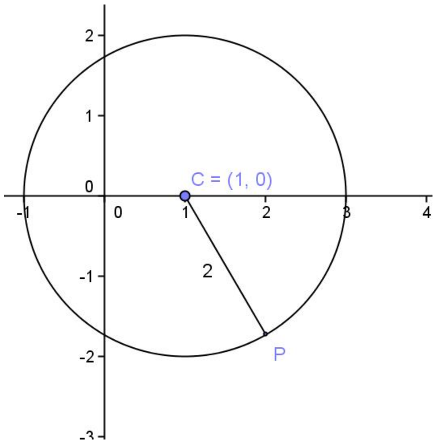
Perciò: C ( 1 ; 0 )  r = 2

♥ Utilizzando il **metodo del completamento dei quadrati**:

Osservo $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ . Per completare il quadrato del binomio che ha come primo termine $\mathbf{x^2}$ e come doppio prodotto $\boldsymbol{-2x = 2\cdot(x)\cdot(-1)}$ devo aggiungere il quadrato di (-1), e cioè +1. Ma se in un'equazione VERA (che possiamo pensare come una bilancia in equilibrio) aggiungo un termine, perché l'equazione resti VERA, dovrò ANCHE toglierlo!
Sembra non avere senso: così resta tutto UGUALE! E infatti uguale deve restare come VALORE: voglio solo cambiargli la FORMA, per ritornare all'equazione di circonferenza NON CANONICA, in cui si VEDONO subito sia le coordinate del centro che la misura del raggio.

$$y^2 + \underline{x^2 - 2x + \mathbf{1}} - \mathbf{1} - 3 = 0 \Rightarrow y^2 + (x-1)^2 = 4$$

**Quindi:** C ( 1; 0 ) e r = $\sqrt{4}$ =2, come avevo già trovato prima, con l'altro metodo.




**Dall'esercizio precedente, la cui risoluzione si completa con il disegno qui a fianco, si può dedurre che: <u>se e solo se l' equazione canonica di una circonferenza ha b = -2$y_0$ = 0, la circonferenza ha il suo centro C sull' asse delle ascisse. Infatti, poiché l'ordinata del centro è legata a b dalla relazione:</u>** $y_0 = -\frac{b}{2}$***, se e solo se b=0 anche l'ordinata del centro sarà 0 e preciò il centro sarà un punto dell'adx (tutti e soli i punti dell'adx hanno infatti ordinata zero)***

## 2- Circonferenza con centro sull'ady

**ES** $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0.$ Riconoscendo che: ***a***= 0, ***b***= 6 e ***c***= 5, si ha:

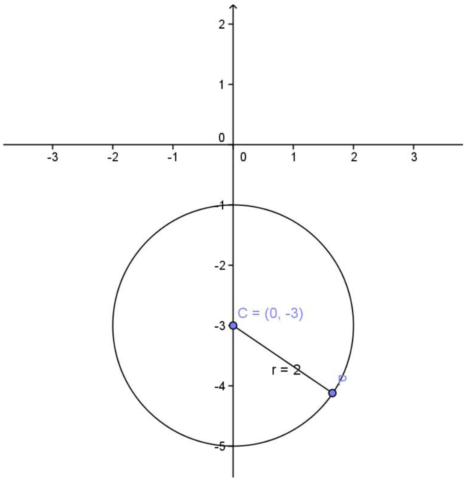
$x_0 = 0$ ; $y_0 = -6/2 = -3$ ; $r = \sqrt{0+9-5} = \sqrt{4} = 2$

Perciò: C ( 0; - 3 ) r = 2

♥ Utilizzando il **metodo del completamento dei quadrati**:

Osservo l'equazione: $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$. Per completare il quadrato che ha come secondo termine $\mathbf{y^2}$ e come doppio prodotto $\boldsymbol{6y = 2\cdot(y)\cdot(3)}$ devo aggiungere il quadrato di (3), e cioè 9.

$x^2 + y^2\ 6y \mathbf{+ 9} \mathbf{- 9} + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + (y+3)^2 = 4$




**Quindi:** C (0 ; **-** 3 ) e $\boldsymbol{r} = \sqrt{4} = 2$, come avevo già trovato prima, con l'altro metodo.

**Da questo disegno, che rappresenta la circonferenza di equazione n. 2, si può dedurre che se e solo se l' equazione canonica di una circonferenza ha: $a=-2x_0=0$, la circonferenza ha il centro C sull' asse delle ordinate.**

**Infatti, poiché l'ascissa del centro è:** $x_0 = -\,a/2$, ***se e solo se a=0, anche l'ascissa del centro sarà 0 e perciò il centro sarà un punto dell'ady (tutti e soli i punti dell'ady hanno infatti ordinata zero)***

## 3- Circonferenza con centro sulla bisettrice di I e III quadrante

**ES** $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0.$ Riconoscendo che: ***a***= 4, ***b***= 4 e ***c***= -1, si ha:

$x_0 = -4/2 = -2$ ; $y_0 = -4/2 = -2$ ; $r = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

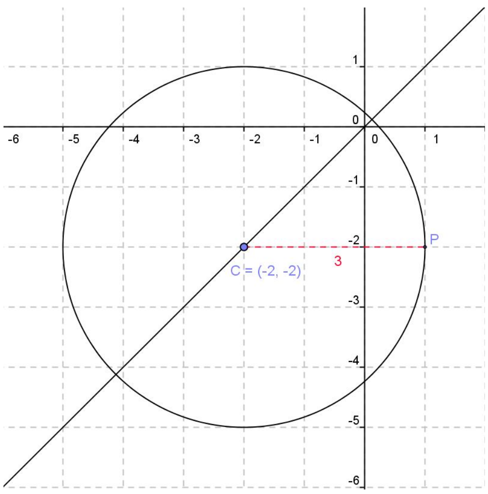
Perciò: C ( - 2; - 2 ) r = 3

♥ Utilizzando il **metodo del completamento dei quadrati**:

Osservo l'eqazione: $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$. Questa volta i quadrati da completare sono due:
1) quello che ha come primo termine $\mathbf{x^2}$ e come doppio prodotto ***4x = 2·(x)·(2), che devo completare con il quadrato di 2, cioè 4***
***2)quello che ha*** come primo termine $\mathbf{y^2}$ e come doppio prodotto **4y =** ***2·(y)·(2) che devo completare con il quadrato di 2, cioè 4. Al solito quello che aggiungo poi devo togliere!***

$x^2 + 4x \mathbf{+ 4} \mathbf{- 4} + y^2 + 4y \mathbf{+ 4} \mathbf{- 4} - 1 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (y+2)^2 = 9$

**Quindi:** C (-2 ; -2 ) e $r = \sqrt{9} = 3$, come avevo già trovato prima, con l'altro metodo




**Da questa rappresentazione della circonferenza corrispondente all'equazione n. 3** $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$ **si può dedurre che se e solo se nell'equazione canonica a=b, il centro C della circonferenza sta sulla bisettrice di I e III quadrante .**

Infatti i punti di tale bisettrice sono tutti e solo quelli che hanno ascissa e ordinata uguali (come espresso dalla sua equazione rappresentativa: y=x). E ormai dovresti aver chiaro il legame tra ***a***, ***b*** e le coordinate di C.

## 4- Circonferenza con centro sulla bisettrice di II e IV quadrante

**ES** $x^2 + y^2 - 3x + 3y + 7/2 = 0$. Riconoscendo che: ***a***= -3, ***b***= 3 e ***c***= 7/2, si ha

$x_0 = +3/2$ ; $y_0 = -3/2$ ; $r = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

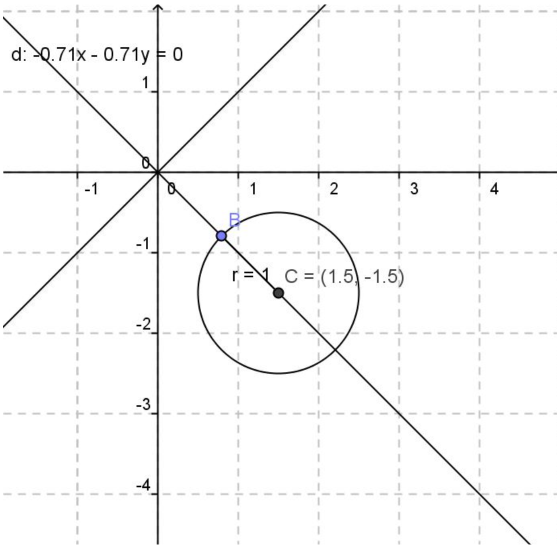
Perciò: C ( 3/2; - 3/2 ) r = 1

♥ Utilizzando il **metodo del completamento dei quadrati**:

Osservo: $x^2 + y^2 - 3x + 3y + 7/2 = 0$. Anche questa volta i quadrati da completare sono due:

1) Il quadrato che ha come primo termine $x^2$ ,e come doppio prodotto: ***-3 x = 2·(x)·(-3/2) che devo completare con li quadrato di (-3/2),*** cioè 9/4
2) Il quadrato che ha come primo termine $y^2$ e come doppio prodotto: **3y = *2·(y)·(3/2) che devo completare con li quadrato di (3/2),*** cioè 9/4

$x^2 \underline{- 3x + 9/4} - 9/4 + y^2 + 3y + 9/4 - 9/4 + 7/2 = 0 \Rightarrow (x + 3/2)^2 + (y + 3/2)^2 = 4/4$




**Quindi:** C ( 3/2; -3/2 ) e ***r*** = √4/4=1, come avevo già trovato con l'altro metodo.

**Da questa rappresentazione della circonferenza corrispondente all'equazione n.4** $x^2 + y^2 - 3x + 3y + 7/2 = 0$ **si può dedurre che se e solo se nell'equazione canonica *a=-b* (*a* e *b* sono *opposti*), il centro C della circonferenza sta sulla bisettrice di II e IV quadrante** .

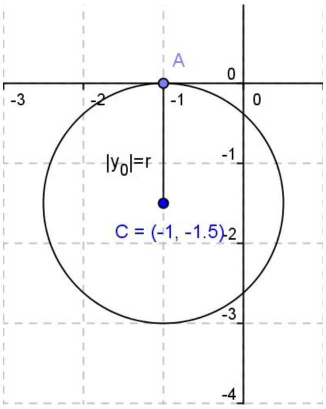
Infatti i punti di tale bisettrice sono tutti e solo quelli che hanno ascissa e ordinata *opposti* (come espresso dalla sua equazione rappresentativa: y=-x).

## 5-Circonferenza tangente all'*adx*

**ES** $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$. Riconoscendo che: ***a***= 2, ***b***= 3 e ***c***= 1, si ha:

$x_0 = -2/2 = -1$ ; $y_0 = -3/2$ ; $r = \sqrt{1+\frac{9}{4}-1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

Perciò: C ( - 1; - 3/2 ) r = 3/2




♥ Utilizzando il **metodo del completamento dei quadrati**:

$x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0 \Rightarrow x^2\ \underline{2x + 1} - 1 + y^2 + 3y + 9/4 - 9/4 + 1 = 0 \Rightarrow$

$(x + 1)^2 + (y + 3/2)^2 = 9/4$ **Perciò:** C ( - 1; -3/2 ) e r = √ 9/4= 3/2

**Ancora una volta si ricava osservando il disegno la *CNS* affinché una circonferenza sia tangente all'adx, e cioè se e solo se c = *a*²/4 . Infatti perché una circonferenza sia tangente *all'adx* dev'essere: $y_0 = r$. Ricordando che: $c = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \Rightarrow$**

**$c = x_0^2 + y_0^2 - y_0^2$ che, semplificato, dà: $c = x_0^2$. MA $x_0^2 = -a/2$ QUINDI c= *a*²/4**

## 6-Circonferenza tangente all'*ady*

**ES** $x^2 + y^2 + 5x - 4y + 4 = 0$ **a**= 5, **b**= -4 e **c**= 4, si ha

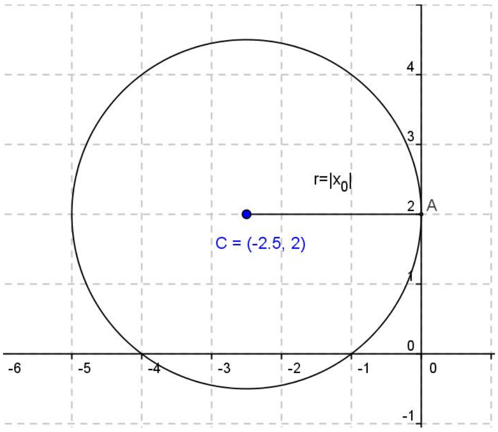
$x_0 = -5/2$ ; $y_0 = 4/2 = 2$ ; $r = \sqrt{\frac{25}{4} - 4 + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

Perciò: C(– 5/2; 2) r = 5/2

- Utilizzando il **metodo del completamento dei quadrati** invece avrei:

$x^2 + y^2 + 5x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + \underline{5x + 25/4} - 25/4 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 4 = 0 \Rightarrow (x + 5/2)^2 + (y - 2)^2 = 25/4$

**Quindi:** C ( -5/2; 2 ) e $r = \sqrt{\frac{25}{4}} = 5/2$, come avevo già trovato prima, con l'altro metodo




**Ancora una volta si ricava osservando il disegno la *CNS* affinché una circonferenza sia tangente all'adx, e cioè se e solo se c = *b*²/4 . Infatti perché una circonferenza sia tangente *all'adx* dev'essere: $x_0 = r$. Ricordando che: $c = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \Rightarrow$**

**$c = x_0^2 + y_0^2 - x_0^2$ che, semplificato, dà: $c = y_0^2$. MA $x_0^2 = -b/2$ QUINDI $c = b^2/4$**

## 7-Circonferenza passante per **O**

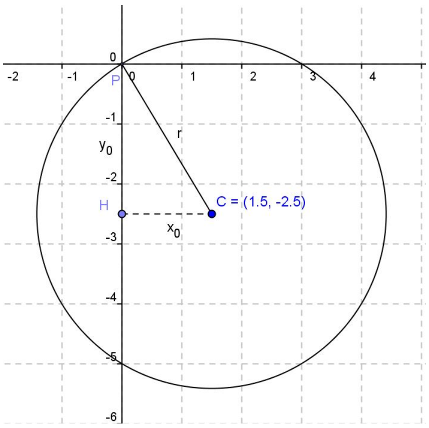
**ES** $x^2 + y^2 - 3x + 5y = 0$ **a**= -3 **b**= 5 e **c**= 0 si ha

$x_0 = 3/2$ ; $y_0 = -5/2$ ; $r = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4} - 0} = \sqrt{\frac{34}{4}} \sqrt{\frac{17}{2}}$. Perciò: C(3/2; – 5/2) e r = 17/2

- Utilizzando il **metodo del completamento dei quadrati** invece avrei:

$x^2 + y^2 - 3x + 5y = 0 \Rightarrow x^2 \underline{-3x + 9/4} - 9/4 + y^2 + 5y + 25/4 - 25/4 = 0 \Rightarrow (x - 3/2)^2 + (y + 5/2)^2 = 34/4$

**Quindi:** C ( 3/2; -5/2 ) e $r = \sqrt{\frac{34}{4}} \sqrt{\frac{17}{2}} \approx 2{,}92$




**Da questa rappresentazione della circonferenza corrispondente all'equazione n. 7** $x^2 + y^2 - 3x + 5y = 0$ **si può dedurre che se e solo se c = 0 la circonferenza passa per l' origine cel sistema cartesiano (ovvero l'origine del SdR è un punto della circonferenza).**

**Infatti solo in questo caso $x_0$, $y_0$, e $r$ sono legati dal Teorema di Pitagora direttamente: $r^2 = x_0^2 + y_0^2$ perché il raggio è ipotenusa del triangolo rettangolo PHC (P≡O) i cui cateti misurano CH=| $x_0$| e PH=|$y_0$|.**

## 8-Circonferenza tangente a entrambi gli assi cartesiani

**ES** $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0$ $\quad$ ***a***= 6 ***b***= 6 e ***c***= 9 si ha

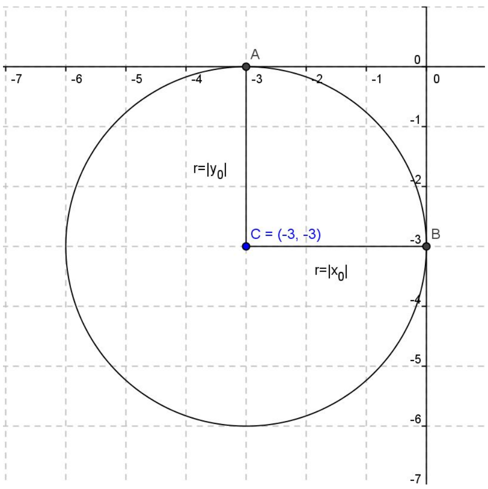
$x_0 = -6/2 = -3$ ; $y_0 = -6/2 = -3$ ; $r = \sqrt{9+9-9} = \sqrt{9} = 3$

Perciò: $C(-3;-3)$ $\quad r = 3$

♥ Utilizzando il **metodo del completamento dei quadrati** invece avrei:

$x^2 + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0$

$$x^2+6x+9-9+y^2+6y+9-9=0 \Rightarrow (x+3)^2+(y+3)^2=9$$




**Quindi:** $C(-3;-3)$ e $r = \sqrt{9} = 3$, come avevo già trovato prima, con l'altro metodo

**Da questa rappresentazione della circonferenza corrispondente all'equazione n. 8** $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0$ **si può dedurre che se e solo a = b = r e perciò, essendo:** $c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$, $c = x_0^2 = a^2/4$ **la circonferenza è tangente a entrambi gli assi.**

Arrivati a questo punto dovresti essere in grado di perfezionare da te la giustificazione della condizione trovata!

**Per sintetizzare scriverò l'equazione canonica relativa alle circonferenze con "posizione particolare" nel piano cartesiano, che abbiamo studiato:**

1. ***Circonferenza con centro sull'adx:*** $x^2 + y^2 + ax + c = 0$ $\quad b=0$
2. ***Circonferenza con centro sull'adx:*** $x^2 + y^2 + by + c = 0$ $\quad a=0$
3. ***Circonferenza con centro sulla bis I e III Q:*** $x^2 + y^2 + ax + ay + c = 0$ $\quad a=b$
4. ***Circonferenza con centro sulla bis II e IV Q:*** $x^2 + y^2 + ax - ay + c = 0$ $\quad a=-b$
5. ***Circonferenza tangente all'adx:*** $x^2 + y^2 + ax + by + a^2/4 = 0$ $\quad c = a^2/4$
6. ***Circonferenza tangente all'ady:*** $x^2 + y^2 + ax + by + b^2/4 = 0$ $\quad c = b^2/4$
7. ***Circonferenza per 0:*** $x^2 + y^2 + ax + ay = 0$ $\quad c=0$
8. ***Circonferenza tangente a entrambi gli assi*** $x^2 + y^2 + ax + ay + a^2/4 = 0$

Spero sia ovvio che questi casi non vanno imparati a memoria ma abbiamo "giocato" con essi per sviluppare familiarità con le relazioni tra i parametri a, b, c dell'equazione in forma canonica e i loro significati geometrici, cioè le conseguenze che, talune regolarità di questi parametri, portano in relazione alla posizione della circonferenza in relazione al SdR cartesiano