Rette nel piano cartesiano

Cominciamo con un esercizio di ripasso: **Rappresenta** su un *piano cartesiano opportuno* i seguenti punti dei quali ti vengono fornite le **coordinate**:

$$A(-\frac{3}{4};\frac{5}{6})\ ;\ B(\frac{5}{2};-\frac{5}{3})\ ;\ C(2\cdot\sqrt{2};\sqrt{5})\ ;\ D(1+\sqrt{2};1-\sqrt{2})$$

Per rappresentare frazioni su un foglio a quadretti vedi **allegato1** schede di recupero.

Per rappresentare le **radici** si devono utilizzare il Teorema di Pitagora e il compasso:

$2\cdot\sqrt{2}$ è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di lato 2.

$\sqrt{5}$ si può ottenere come ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti 1 e 2.

Per rappresentare il punto **D** bisogna avere consapevolezza del **significato geometrico delle operazioni di addizione e sottrazione**: aggiungere $\sqrt{2}$ a 1, sull'ad*x*, significa, partendo da 1 andare *verso destra* di una lunghezza pari a $\sqrt{2}$; togliere $\sqrt{2}$ da 1 sull'ad*y*, significa, partendo da 1 andare *verso il basso* di una lunghezza pari a $\sqrt{2}$: aggiungere è *affiancare* segmenti nel verso di crescenza, togliere è *affiancare* segmenti nel verso contrario a quello di crescenza. Ripassa le operazioni fra segmenti.

1 *Equazione* di una retta parallela ad uno degli assi cartesiani

- Rappresenta su di un piano cartesiano i seguenti punti: **P**(-3;-4) **Q**(-3;0) **R**(-3;1) **S**(-3;2).

La *caratteristica comune ai punti* P,Q, R e S è che *hanno l'ascissa che vale* -3"

Unendo i punti P, Q, R, S, ottieni il segmento PS (o tre segmenti adiacenti: PQ, QR e RS)

Prolungando **RS** *verso l'alto* e **PQ** *verso il basso* all'*infinito*, ottieni la retta r_{PS}

- In linguaggio matematico la **caratteristica** comune a **tutti** e **soli i punti**[1] appartenenti alla *retta* r_{PS} si scrive: x=-3 che si chiama **equazione rappresentativa della retta** r_{PS}

Osserva la **posizione di tale *retta* rispetto a ciascuno degli assi cartesiani**: è ortogonale all'*asse delle x* ed è parallela *all'asse delle y.*

Disegnando rette parallele alla retta r_{PS} e osservando su ciascuna di queste le coordinate dei loro punti si osserva che tali punti hanno stessa ascissa.

L'elemento che distingue tali rette l'una dall'altra è Il *valore numerico* di tale ascissa.

Rappresenta sullo stesso piano cartesiano i punti: **A**(0;-4) **B**(0;0) **C**(0;1) **D**(0;2).

Cosa osservi? Stanno tutti sull'asse delle *y* che, in effetti è parallelo a sé stesso!

L'**equazione rappresentativa dell'*ady*** sarà dunque: x=0

N.B.: Le rette dello stesso tipo di r_{PS}, cioè **parallele all'*ady***, compreso l'*ady* stesso, hanno tutte un'equazione rappresentativa che ha la stessa forma, x = ***a***. In simboli:

r / / *ady* sse (opp ⇔) ***r***: x=***a***, con $a\in\Re$ *(si legge: "**a** è un numero reale")*

- Rappresenta su di un piano cartesiano i seguenti punti: **P'**(-3;3) **Q'**(1;3) **R'(**2;3) **S'**(4;3).

La *caratteristica comune ai punti* P',Q', R' e S' è che "*hanno l'ordinata che vale* 3"

L'equazione rappresentativa della retta $r_{P'S'}$ sarà pertanto: y=3

Osserva la **posizione di tale *retta* rispetto a ciascuno degli assi cartesiani**: è ortogonale all'*asse delle y* ed è parallela *all'asse delle x.*

Disegnando rette parallele alla retta $r_{P'S'}$ e osservando su ciascuna di queste le coordinate dei loro punti si osserva che tali punti hanno **stessa ordinata.**

[1] Comune alle coordinate di tali punti

L'elemento che distingue tali rette l'una dall'altra è Il *valore numerico* di tale ordinata

Rappresenta sullo stesso piano cartesiano i punti: **A'**(2;0) **B'**(-4;0) **C'**(0;0) **D'**(1;0).

Cosa osservi? Stanno tutti sull'asse delle *x* che, in effetti è parallelo a sé stesso!

L'**equazione rappresentativa dell'*adx*** sarà dunque: *y*=0

N.B.: Le rette dello stesso tipo di $\boldsymbol{r}_{\mathbf{P'S'}}$, cioè **parallele all'*adx***, compreso l'*adx* stesso, hanno tutte un'equazione rappresentativa che ha la stessa forma: *x* = ***b***. In simboli:

r / / *adx* sse (opp ⇔) ***r***: *y*=***b***, con *x*=*b* con $b \in \Re$

SIMBOLOGIA CONVENZIONALE Attenzione: quando ti troverai a dover indicare negli esercizi l'equazione di rette che rispettano richieste dall'esercizio, il linguaggio convenzionale è il seguente: dovrai indicare il "nome della retta" (può essere già assegnato dal testo dell'esercizio o lo puoi attribuire tu utilizzando per esempio la lettera ***r*** con al *pedice* due punti della retta) seguito dai "due punti" (che si leggono: "ha equazione") e dall'equazione stessa. Riepilogando quando detto sinora avremo dunque:

$r_{//\,ady} : x = a \,|\, a \in \Re$ (e, in particolare) *ady* : *x*=0 La sbarra verticale dopo *a* si legge: "tale che"

$r_{//\,adx} : y = b \,|\, b \in \Re$ (e, in particolare) *adx* : y=0

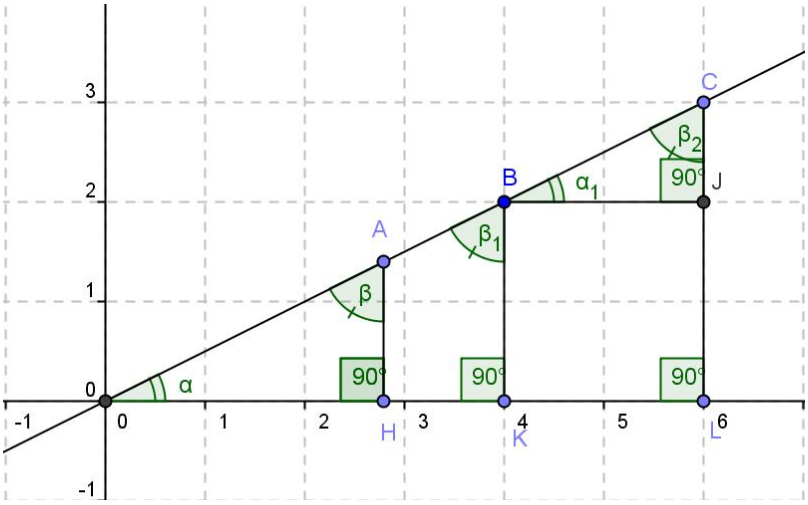
2 Equazione di una retta passante per l'origine. Pendenza di una retta.

I procedimenti seguiti fin qui conducono ad alcune conclusioni: quando si stabilisce sul *piano* un riferimento cartesiano si trova che (guarda i disegni sul tuo quaderno):

- Ad ogni punto del piano corrisponde una coppia di numeri (e viceversa)
- Ad una *retta parallela ad uno degli assi cartesiani* corrisponde un'*equazione*
- L'**equazione** di **una retta** esprime *con una formula matematica* **la proprietà comune** a ***tutti*** e ***soli*** **i punti**[2] che *appartengono* a **quella retta**

Quando la retta è parallela ad uno degli assi è facile scriverne l'equazione perché è facile trovare la *proprietà che caratterizza i suoi punti*. Quando la **retta** è **passante** per **l'origine**?

- Disegna sul tuo foglio la retta ***a*** passante per **O**(0;0) e per **A**(4;2). Immagina di poter *muovere* un punto **P**(*x;y*) lungo tale retta. Mentre **P** si muove la sua *ascissa x* e la sua *ordinata y* cambiano continuamente; eppure c'è qualcosa che caratterizza il percorso lungo retta ***r*** : nel suo moto **P** non effettua nessuna *variazione di inclinazione*.



Presi comunque punti sulla retta, perciò, questi sono *estremi di segmenti che giacciono sulla stessa retta*.

Se proiettiamo i punti **A**, **B**, **C** sull'*adx*, i segmenti di cui sono estremi ci "appaiono" come ipotenuse di triangoli rettangoli **SIMILI** (**OHA**, **AKB**, **ALC**, ma anche **BJC**).

DEF Due poligoni sono **simili** se hanno stesso numero di lati, angoli corrispondenti congruenti, lati corrispondenti in proporzione.

Cioè due poligoni sono simili se hanno "stessa forma" anhe se dimensioni differenti.

[2] **Tutti** i punti le cui coordinate verificano *l'equazione rappresentativa della stessa* sono punti della retta e, viceversa, **solo** i punti della retta hanno coordinate che verificano *l'equazione rappresentativa della stessa*, cioè se un punto non appartiene ad una retta allora le sue coordinate non verificheranno mai l'equazine della retta.

Si dimostra che due **triangoli** sono **simili** se e solo se hanno **angoli corrispondenti congruenti**. I triangoli **OHA**, **AKB**, **ALC**, **BJC** hanno gli angoli congruenti infatti:

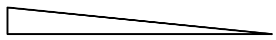
OHA, **AKB**, **ALC** hanno α in comune, un angolo di 90° e quindi il terzo angolo congruente per differenza di angoli congruenti. Per quel che riguarda **BJC**, α e α_1 sono congruenti perché corrispondenti relativamente alle parallele $\boldsymbol{r}_{BJ}$ e ***adx*** tagliate dalla trasversale $\boldsymbol{r}_{OA}$ e per gli altri angoli vale il discorso fatto precedentemente.

OHA, **AKB**, **ALC**, **BJC**, essendo simili, hanno i **lati corrispondenti in proporzione**. Ciò vuol dire che sono uguali, in particolare, i seguenti rapporti:

AH / OH = BK / OK = CL / OL = CJ / BJ

Tale rapporto costante si indica convenzionalmente con la lettera ***m*** e si chiama **pendenza**.

La pendenza di una strada è una nozione abbastanza comune (cfr cartelli stradali): si ha:

$pendenza = \dfrac{aumento\ di\ quota}{spostamento\ orizzontale}$ **ES**  Pendenza $= \dfrac{10}{100} = 10\,\%$

Essendo la pendenza della retta ***a*** <u>costante</u>, per conoscerla basterà "andare" da **O** ad **A** muovendosi "parallelamente agli assi".

Si ha così: spostamento orizzontale = 4 Aumento di quota = 2. Perciò la pendenza della retta ***a*** è data dal numero 2:4= ½

Osserva che 2 e 4 sono rispettivamente ordinata e ascissa di A. Questo fatto vale per qualunque punto della retta ***a***; anche per i punti del **III** quadrante. Cioè, per ogni punto di a si ha: *y*/*x* = ½ . Perciò un punto P(*x;y*) percorre la retta ***a se e solo*** se risulta *y* = ½ *x* e questa è proprio l'**equazione della retta *a***

- La retta **a** ovviamente <u>non è la sola che passa per **O**</u>. Per esempio disegna la retta **b** che passa per **B**(2;3) e la retta **c** che passa per **C**(1;2). Trova la pendenza e scrivine l'equazione.

Pendenza di ***b*** = $\dfrac{3}{2}$ Equazione ***b*** : *y* = $\dfrac{3}{2}$ *x*; Pendenza di ***c*** = 2 Equazione ***c*** : *y* =2 *x* ……

Ora disegna la retta ***d*** che passa per **O** e **D**(2;-4). Cosa osservi? Ad uno spostamento orizzontale = 2, che aumento di quota corrisponde? "-4"

La **pendenza** della retta ***d*** sarà dunque **negativa** e varrà: -2 Equazione di ***d*** : *y* = -2 *x*

Le rette passanti per l'origine che passano per II e IV Q avranno **pendenza negativa**.

N.B.: Una retta che passa per **O** avrà *quasi* sempre (*ady* è escluso) equazione del tipo:

y **=** ***m****x* (con: ***m***=*y*/*x*)

Le lettere *x*, *y* e ***m*** che compaiono nell'equazione hanno il seguente significato:

- Le lettere *x* ed *y* indicano *l'ascissa e l'ordinata di un punto P(x;y) che percorre la retta*
- La lettera *m* indica la **pendenza della retta** L'asse delle *x* ha pendenza che vale: 0 perché per ogni suo punto l'aumento di quota, che sta al numeratore, è 0.
- *L'asse delle y* ha pendenza <u>che non si può calcolare</u> perché per ogni suo punto lo spostamento orizzontale, che sta al denominatore, vale 0.

EX Disegna le rette passanti per **O** e per **A**(2;2) e per **O** e per **B**(-2;-2) e scrivi le equazioni.

Soluzione: tali rette sono le due bisettrici. ***bis I-IIIQ***: *y* = *x* e ***bis II-IVQ*** : *y* = - *x*

3 Equazione di una retta nel piano cartesiano

- Disegna, in un riferimento cartesiano Oxy *opportuno*, la retta ***a*** della scheda **4**, passante per **O**(0;0) e per **A**(4;2), e la retta ***a'*** passante per i punti **B**(0;3) e **A**'(4;5).

L'equazione di ***a*** è: *y* = *½ x*. Vediamo come si può arrivare a scrivere l'equazione di ***a'***.

Osserva la posizione reciproca delle due rette. Cosa noti? Sono **parallele.**

Riesci a vedere in che modo, _muovendo_[3] la retta ***a***, la puoi portare a sovrapporsi con ***a'*** ?

In definitiva la retta ***a'*** è stata ottenuta traslando la retta ***a***.

Questo fatto, che conseguenze ha sulle coordinate dei punti di ***a'*** e sulla sua equazione? (confronta le coordinate di **O** e **B** e le coordinate di **A** e **A'**). La traslazione aggiunge 3 all'ordinata di **ciascun** punto di ***a*** .

Il punto **P**(*x;1/2 x*) che percorre ***a***, *diventa* il punto **P'** (*x*; ½ *x* +3) che percorre ***a'***.

Della retta ***a'*** si può dunque dire che:

- ha pendenza ½ ; interseca l'asse delle *y* in **B**(0;3); ha equazione : $y = \frac{1}{2}x+3$

- Se traslassimo ***a*** di -3, invece che di +3, otterremmo una retta che:

  - ha pendenza ½ ; interseca l'asse delle *y* in (0;-3).; ha equazione: $y = \frac{1}{2}x-3$

Gli esempi precedenti suggeriscono delle conclusioni di carattere generale:

*Disegnata sul piano cartesiano una retta **r** con le seguenti caratteristiche:*

pendenza ***m*** ; intersezione con l'asse delle *y* in **Q**(0;***q***)

si troverà che la retta ***r*** ha equazione: $y=mx+q$

- Nell'equazione precedente si possono trovare, come casi particolari anche *alcune* delle equazioni incontrate nelle schede **3** e **4**. Si ha infatti che:

- Per le rette che passano per **O**(0;0) si ha che ***q*** = 0 perciò l'equazione diventa: $y=mx$
- Per l'asse delle *x* si ha anche ***m*** = o, perciò l'equazione diventa: $y=0$
- Per le rette parallele all'asse delle *x*, che incontrano l'asse delle *y* in **Q**(0;**q**), la pendenza è sempre ***m*** = 0 Dunque l'equazione diventa: $y=q$

N.B. Le equazioni ***x = a*** non sono casi particolari della ***y = mx + q***. Per le rette di questo tipo infatti, si presenta la *stessa situazione dell'asse delle y*: non è possibile calcolarne la pendenza e perciò l'equazione non si può ottenere dalla ***y = mx + q*** .

Si ottiene invece la loro equazione osservando direttamente che tutti i punti che appartengono loro sono caratterizzati dall'avere la stessa ascissa.

L'equazione di una retta nel piano cartesiano si presenta in una delle forme seguenti:

y = mx + q opp ***x = a***

EX Disegna **s**: $x=-\frac{3}{5}$; ***t***: $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{5}$

Come si fa a disegnare la retta **t**? Si "parte" dal punto d'intersezione con l'*ady*, che è (0;7/5) e da lì, con il metodo della "scaletta" si può scegliere di:

o andare a destra di 3 e verso l'alto di 2, ***o*** andare verso l'alto di due e a destra di 3, ***o*** di andare a sinistra di 3 e in basso di 2 ***o*** di andare in basso di 2 e a sinistra di 3.

Purché **spostamento orizzontale** e **aumento di quota** siano "concordi" (solo così la pendenza è positiva) e valgano, in "valore assoluto" (senza segno), *rispettivamente* 3 e 2.

N.B.: Per disegnare correttamente una retta devi determinare il **punto d'intersezione con l'*adx***. Poiché un punto del genere ha ordinata 0, per determinarlo puoi sostituire al posto di ***y*** nell'equazione della retta $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{5}$ il valore 0 (cfr nota 2). ti resterà un'equazione in ***x*** la soluzione della quale rappresenta proprio l'ascissa del punto cercato!

Prova e confronta il risultato con il disegno

---

[3] Far scivolare una retta senza modificarne la pendenza in "matematichese" si dice **traslarla**

4 Dall'equazione di una retta al suo grafico e viceversa

Fin qui abbiamo seguito un percorso per chiarire la relazione fra *equazione di una retta* e *grafico* di questa. Vediamo ora come utilizzare le informazioni acquisite per risolvere alcuni esercizi. Gli esercizi base sulla retta possono essere del tipo:

EX "Data l'equazione della retta r: $y = 3x + 5$ *disegna* il grafico corrispondente."

Disegna le rette di equazione (dai loro nomi progressivi: $r_1; r_2; etc.$):

$$y = 3x - 5\,;\ y = -3x + 5\,;\ y = -3x - 5\,;\ y = \frac{1}{3}x + 4\,;\ y = \frac{1}{3}x - 4\,;\ y = -\frac{1}{3}x + 4\,;\ y = -\frac{1}{3}x - 4$$

Equazione di una retta passante per un punto e di pendenza (o intercetta) data

EX "Determina l'equazione della retta passante per un punto dato **P**(x_P; y_P) e della quale tu conosca la pendenza **m** (o l'intercetta **q**)"

Per risolvere un esercizio del genere è indispensabile aver compreso il significato della nota 2 quindi rivediamolo: c'è una *corrispondenza biiunivoca* fra coordinate dei punti della retta e le soluzioni dell'equazione della retta stessa. Ciò vuol dire che le coordinate di ciascun punto della retta, se sostituite rispettivamente ad *x* ed *y* dell'equazione della retta, danno origine ad un'uguaglianza vera. E sono solo i punti della retta ad avere questa caratteristica: se prendo un punto esterno e sostituisco le coordinate otterrò un'uguaglianza falsa (per convincertene prova con le rette che hai già disegnato).

Perciò se conosci la pendenza ***m*** = 3, e sai che la retta passa per il punto **A**(-1;-4), tu potrai scrivere intanto l'equazione della retta fino ad un certo punto: *y*=**3***x*+***q*** e poi, sostituendo le coordinate di A al posto "giusto" (-1 dov'è scritto ***x*** e -4 dov'è scritto ***y***) avrai un'equazione in ***q***: -4=3(-1)+***q*** cioè: ***q***-3=-4 (per la simmetria dell'uguaglianza) e infine: ***q***=-1. Disegna.

Se invece conoscessi ***q***= -1, e sapessi che la retta passa per il punto **A**(-1;-4), tu potrest scrivere intanto l'equazione della retta fino ad un certo punto: *y*=***m****x*+***-1*** e poi, sostituendo le coordinate di **A** al posto "giusto" (-1 dov'è scritto ***x*** e -4 dov'è scritto ***y***) avrai un'equazione in ***m***: -4=***m***(-1)***-1*** cioè: -***m***-1=-4 (per la simmetria dell'uguaglianza) e infine: ***m***=3. Disegna.

Equazione di una retta passante per due punti

EX "Dati i due punti **A**(x_A;y_A) e **B**(x_B;y_B) disegna la retta passante per **A** e **B** (r_{AB}) e *scrivine l'equazione rappresentativa*". In questo caso si può procedere in due modi.

Partiamo da un esempio: **A**(5;7) **B**(-2;3). Innanzitutto puoi osservare che r_{AB} non è parallela agli assi cartesiani e non passa per **O**, quindi la sua equazione sarà del tipo: *y*=***m****x*+***q***.

x e *y* sono due **variabili** che indicano le *coordinate di un generico punto che si muove lungo la retta*. Scrivere l'equazione di r_{AB} significa dunque attribuire un valore numerico *determinato* ai **parametri *m* e *q***. Vi sono due modi possibili:

I modo (trova la pendenza e poi *imponi il passaggio per un punto* per trovare ***q***)

Individua **A** e **B** sul piano cartesiano e proiettali su *adx* e *ady*.

Indica con **H** il punto d'intersezione fra: proiezione di **B** su *adx* e prolungamento della proiezione di **A** sull'*ady*. Viene così a formarsi un triangolo rettangolo: **AHB**, retto in **H**.

Osservando questo triangolo e ricordando quel che abbiamo detto della pendenza di una retta, secondo te, come si trova la pendenza di r_{AB} ? $m_{AB} = \frac{BH}{AH} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Ora che hai m_{AB} Puoi scrivere l'equazione della retta così: $y=m_{AB}x+q$

Devi trovare ***q***: ti trovi nell'esercizio precedente $y_A=m_{AB}\ x_A+q$ quindi: ***q***= $y_A - m_{AB} \cdot x_A$. Ovviamente avresti avuto lo stesso risultato sostituendo le coordinate di B.

II modo (*imponi il passaggio per i punti* e usa la *proprietà invariantiva dell'uguaglianza*[4])

Sostituendo le coordinate sia di **A** che di **B** nell'equazione generica

"*eq1*": $y=\boldsymbol{m}x+\boldsymbol{q}$ ottengo altre due uguaglianze VERE:

"*eq2*": $y_A=\boldsymbol{m}\cdot x_A+\boldsymbol{q}$ e

"*eq3*": $y_B=\boldsymbol{m}\cdot x_B+\boldsymbol{q}$.

Per la proprietà invariantiva posso sottrarre "membro a membro" i termini di tali eguaglianze e ottenere eguaglianze equivalenti:

"*eq1-eq2*": $y- y_A =\boldsymbol{m}x-\boldsymbol{m}\, x_B =\boldsymbol{m}(x- x_B)$ ($\boldsymbol{q}$ è stato sottratto) e:

"*eq2-eq3*": $y_A - y_B = \boldsymbol{m}\, x_A-\boldsymbol{m}\, x_B = \boldsymbol{m}\, (x_A-\boldsymbol{m}\, x_B)$

A questo punto, sempre per la proprietà invariantiva posso dividere membro a membro tali uguaglianze nuove e trovare quello che cercavo ($\boldsymbol{m}$ si semplifica):

$\frac{"eq1-eq2!"}{"eq2-eq3"}$ e cioè: $\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}$.

A questo punto, grazie all'ottima proprietà invariantiva posso "moltiplicare in croce" o effettuare altri tipi di calcoli e ottenere l'equazione della retta cercata che, salvo errori di calcolo, deve essere identica a quella trovata con il **I) metodo**.

Inventa coppie di punti e scrivi l'equazione rappresentativa della retta passanet per ciascuna coppia!

---

[4] Data un'uguaglianza vera: A=B sono vere anche le seguenti eguaglianze che saranno dette equivalenti ad A=B:

A+C=B+C ; A-C=B-C ; AC=BC ; $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$