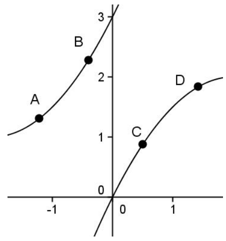
DERIVATE

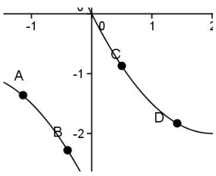
Hai potuto constatare che per *disegnare grafici* non è sufficiente quel che sai trovare sinora (spero): studio del segno, intersezioni con gli assi cartesiani e asintoti. Ti manca di sapere con esattezza *dove* il grafico "cresce" o "decresce", *dov'è* "convesso" e dov'è "concavo".

Definiamo innanzitutto i primi due termini fra virgolette:



DEF Una curva "**cresce**" o "**è crescente**" in quegli intervalli in cui, presi comunque due punti **A**(x_A;y_A) e **B**(x_B;y_B) tali che $x_B > x_A$, si ha che *anche* $y_B > y_A$. Cioè $x_B - x_A > 0 \Leftrightarrow y_B - y_A > 0$, oppure $\Delta x > 0 \Leftrightarrow \Delta y > 0$. A parole: gli ***incrementi*** delle ***x*** e delle ***y*** sono ***concordi***. $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$

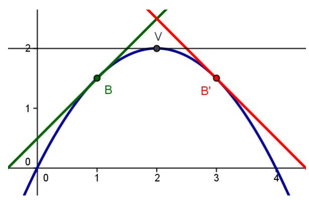
In figura porzioni di curve crescenti; *convessa* (a sx) e *concava* (a dx)



DEF Una curva "**decresce**" o "**è decrescente**" in quegli intervalli in cui, presi comunque due punti **A**(x_A;y_A) e **B**(x_B;y_B) tali che $x_B > x_A$, si ha che, *invece*, $y_B < y_A$. Cioè $x_B - x_A > 0 \Leftrightarrow y_B - y_A < 0$, oppure $\Delta x > 0 \Leftrightarrow \Delta y < 0$. A parole: gli ***incrementi*** delle *x* e delle *y* sono ***discordi***. $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$

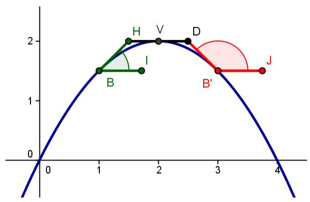
In figura porzioni di curve decrescenti; *convessa* (a dx) e *concava* (a sx)

<u>Il rapporto fra $y_B - y_A$ e $x_B - x_A$ ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$), detto **rapporto incrementale**, è la **pendenza** di una retta secante passante per **A** e **B**.</u>



Però <u>non</u> di rette secanti ci occuperemo ma di **tangenti**, perché?

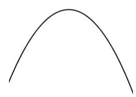
Perché la <u>pendenza della tangente</u> ci dice *punto per punto* se la curva sta crescendo o no e <u>determinare il valore della pendenza di rette tangenti</u> è matematicamente più semplice che di rette secanti!



Una curva è **crescente** *finché* la **pendenza** della retta **tangente** alla curva è **positiva** (incrementi concordi ➔ rapporto incrementale positivo): angolo **IBH** *acuto*. Una curva è **decrescente** *finché* la **pendenza** della retta **tangente** alla curva è **negativa** (incrementi discordi ➔ rapporto incrementale negativo): angolo **JB'D** ottuso.

E dove la **pendenza** è **zero** (punto **V** delle parabole disegnate)?

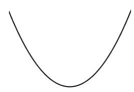
DEF Una curva si dice **stazionaria** nei punti in cui la **pendenza** della **tangente** è **zero**. Questi punti possono essere di **massimo relativo**, di **minimo relativo**, o di **flesso**.



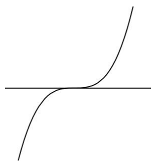
DEF Un punto di una curva si dice di **massimo relativo** se i punti "vicini" (a destra o sinistra) hanno ordinata minore di questo.

NB Un punto di **massimo relativo** fa da *spartiacque* fra una porzione di curva che cresce (a sx del pto) e una porzione di curva che decresce (a dx del pto)

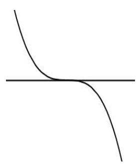
DEF Un punto di una curva si dice di **minimo relativo** se i punti "vicini" (a destra o sinistra) hanno ordinata maggiore di questo.



NB Un punto di **minimo relativo** fa da spartiacque fra una porzione di curva che decresce (a sx del pto) e una porzione di curva che cresce (a dx del pto)



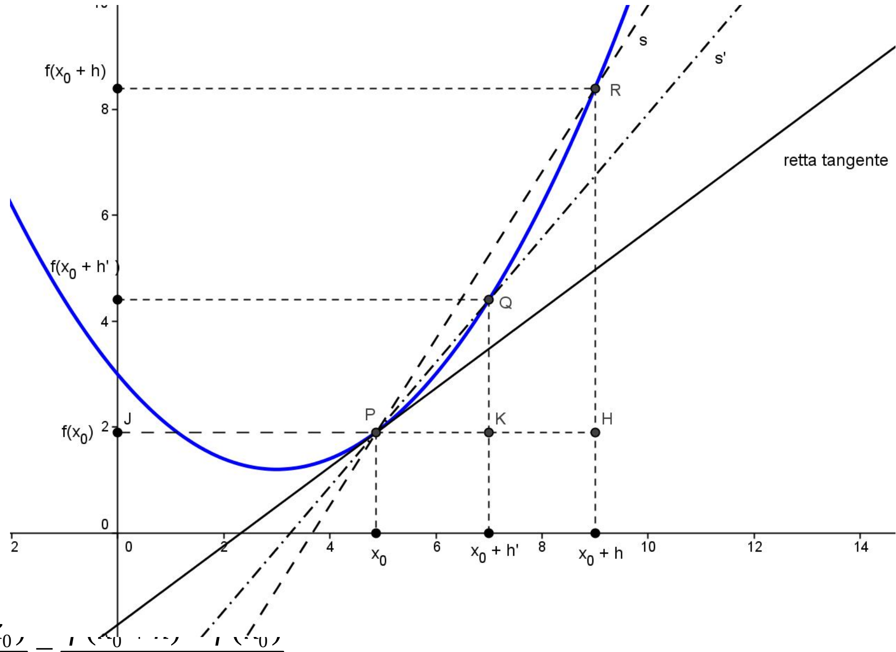
DEF Un punto si dice di **flesso** se la concavità della curva cambia in esso: la curva da **convessa** passa a **concava** o viceversa.



NB A sx **e** a dx di un punto di **flesso** la curva o cresce <u>e continua</u> a crescere (fig. di sx) o decresce e continua a decrescere (fig. di dx).

Quello che c'interessa è quindi conoscere il **segno della pendenza della retta tangente in ogni punto di una curva**, di cui conosciamo l'equazione.

Data la curva in **bluette**, la <u>retta **tangente** alla curva nel punto **P**(x_0;**f**(x_0))</u> (la retta che *tocca in due punti,coincidenti in* ***P*** *il grafico*) la possiamo pensare come <u>caso "limite" di una retta **secante** la curva</u>.



Osserva il disegno: la retta ***s*** immagina di farla ruotare *imperniata* in **P** finché diventi la retta ***s'*** e infine la **retta tangente** appunto.

Così come per disegnare la tangente "partiamo" da una secante e *otteniamo la <u>tangente come limite</u> di questa*, analogamente possiamo ragionare riguardo alla pendenza.

Calcoliamo la pendenza della retta ***s***:

$$m_s=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_R-y_P}{x_R-x_P}=\frac{\overline{RH}}{\overline{PH}}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

La pendenza della retta ***s'*** sarà: $m_{s'}=\frac{\Delta y'}{\Delta x'}=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\frac{\overline{QK}}{\overline{PK}}=\frac{f(x_0+h')-f(x_0)}{h'}$ Dove ***h'*** < ***h***.

Procedendo in questo modo puoi prendere valori di ***h*** *piccoli quanto vuoi*; e più saranno piccoli (anche se <u>differenti da zero</u>) più la retta s*ecante* si avvicinerà alla retta **tangente**.

La **pendenza** della **retta tangente** sarà: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

DEF Data una funzione *f(x)*, definita in un intorno del valore $\boldsymbol{x_0}$, si dice che ***f(x)*** è **derivabile** in $\boldsymbol{x_0}$ se e solo se $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ <u>esiste</u> (cioè limite destro e limite sinistro coincidono in un valore ***l***) <u>finito</u> (***l***<∞). A parole: *se <u>esiste finito</u> il limite del <u>rapporto incrementale</u> della <u>funzione</u>, nell'<u>intorno del punto</u>* x_0.

Se esiste finito, il numero risultato del limite si chiama **derivata (prima)** della funzione *y*=***f***(*x*), in $\boldsymbol{x_0}$, e si indica in simboli: ***f'***(x_0), o $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$, o $Df|_{x=x_0}$.

(Nel tuo libro, a pag 138, trovi esempi di fuzioni <u>non</u> derivabili in un punto)

NB in questo modo abbiamo definito la <u>derivata di ***f*** nel punto x_0</u>. La derivata si può calcolare per <u>ogni punto del I.D.</u> in cui il grafico abbia **tangente** e sia **unica**. Sono esclusi perciò: "salti" (punti di *discontinuità*), "spigoli" e "cuspidi".

DEF In questo modo si definisce una **nuova funzione** che <u>associa ad ogni punto dell' I.D. di ***f***(*x*) il valore della derivata corrispondente in quel punto</u>: la ***funzione derivata di f(x)***.

N.B. ➔ Le **frazioni algebriche**, <u>dove sono definite</u>, sono derivabili.

NNB Lo **studio del segno** della *funzione derivata prima* di ***f***(*x*) ci fornisce alcune delle informazioni che ci mancavano: ci dice infatti dove <u>*f(x) cresce*, *decresce* ed è *stazionaria*</u>.

ES1 ***f***(*x*)=***m****x*+***q***. Se il grafico di una funzione è una retta mi aspetto che la pendenza della tangente in ogni punto coincida con la retta stessa. La derivata di ***f*** dovrà essere pertanto ***m***. Vediamo applicando la definizione: ***f***(x_0+*h*)=***m***·(x_0+*h*) +***q*** (**Ricorda**: per avere ***f***(x_0+*h*) **al posto di *x* devi sostituire: $\boldsymbol{x_0+h}$**), ***f***(x_0)=***m***·(x_0) +***q***. Mettiamo insieme:

(***f***(x_0+*h*)–***f***(x_0))/*h* = [***m*** (x_0+*h*) +***q*** – (***m*** (x_0) +***q***)]/*h* = ***m*** senza neanche fare il limite!

ES2 $f(x)=ax^2$ Ora non sappiamo che aspettarci... Applichiamo la definizione e vediamo (**Ricorda**: per avere $f(x_0+h)$ **al posto di** x **devi sostituire** x_0+h):

$(f(x_0+h)-f(x_0))/h=(a(x_0+h)^2-a(x_0)^2)/h=(ax_0^2+2ahx_0+ah^2-ax_0^2)/h=2ahx_0+ah^2/h=2ax_0+ah$

Per h che *tende a 0* resterà soltanto: $2ax_0$.

Poiché la funzione $f(x)=ax^2$ è definita per tutti i numeri reali, ed è in ogni punto a tangente unica, si avrà: $f'(ax^2)=2ax$

DIM $D(x^n)=n\cdot x^{n-1}$

PREMESSA La dimostrazione classica si basa sullo sviluppo del **binomio di Newton**.Noi ne vedremo una versione semplificata perché, per dimostrare la tesi, basta:

1) sapere che i termini dello sviluppo sono multipli (alcuni in ragione di 1, altri di coefficienti che non ci serve determinare[1]) di: $x^n;\ h\cdot x^{n-1};\ h^2\cdot x^{n-2};...;h^{n-1}\cdot x;\ h^n$

2) conoscere il coefficiente del secondo termine dello sviluppo: $h\cdot x^{n-1}$.

Per effettuare la dimostrazione dobbiamo applicare la definizione di derivata a $f(x)=x^n$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n-(x_0)^n}{h}=\lim_{x\to\infty}\frac{x_0{}^n+n\cdot h\cdot x^{n-1}+(TERMINI\quad CONTENENTI\quad h^k;2\le k\le n)-x_0{}^n}{h}=$$

I termini opposti si semplificano e si raccoglie a fattor comune h al numeratore, che si semplifica con h al denominatore. I restanti termini contenenti h vanno a zero, perché stiamo calcolando il limite per h tendente a zero, e così otteniamo la tesi:

$$=\lim_{h\to 0}\cancel{h}\cdot\frac{n\cdot x^{n-1}+(TERMINI\quad CONTENENTI\quad h^k;1\le k\le n-1)}{\cancel{h}}=n\cdot x_0{}^n$$

Come già richiamato a lezione inoltre: $D(\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot x^k)=\sum_{k=0}^{n}D(a_k\cdot x^k)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot D(x^k)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot k\cdot x^{k-1}$

Essendo, il particolare, D(costante)=0 e $D(a\cdot x^n)=a\cdot n\cdot x^{n-1}$

ES3
$$D(-13\cdot x^4+7\cdot x^3-3\cdot x^2+11\cdot x+71)=-13\cdot Dx^4+7\cdot Dx^3-3\cdot Dx^2+11\cdot Dx+D71)=$$
$$=-13\cdot 4\cdot x^3+7\cdot 3\cdot x^2-3\cdot 2\cdot x+11=-42\cdot x^3+21\cdot x^2-6\cdot x+11$$

Duclis in fundo la **regola di derivazione** delle funzioni **algebriche razionali fratte** (senza dimostrazione!):

Sia: $f(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$ sarà allora: $f'(x)=\frac{N'(x)\cdot D(x)-N(x)\cdot D'(x)}{D(x)^2}$

ES4 $D(\frac{1}{x})=\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$ (prova a darne la dimostrazione: non è difficile!). Dallo studio del segno della funzione derivata (che è definita in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ come $f(x)=\frac{1}{x}$), emerge quanto già sai: la funzione $f(x)=\frac{1}{x}$ è **decrescente** in tutto l'*insieme di definizione*.

---

[1] Osserva che la somma degli esponenti fa sempre n che, mentre l'esponente di x *scende sempre di un valore* – da n a 0 -, l'esponente di h *sale sempre di un valore* – da 0 a n - $(x+h)^n=\underbrace{(x+h)\cdot(x+h)\cdot....\cdot(x+h)}_{n\ \ volte}$ e che il coefficiente del termine generico: $x^{(n-k)}\cdot h^k$ corrisponde al <u>numero di modi in cui si può effettuare il prodotto fra il termine $x^{(n-k)}$ e il termine h^k</u>. Determinare tale coefficiente investe un ambito della matematica che si chiama **calcolo combinatorio**.