GLI ASINTOTI

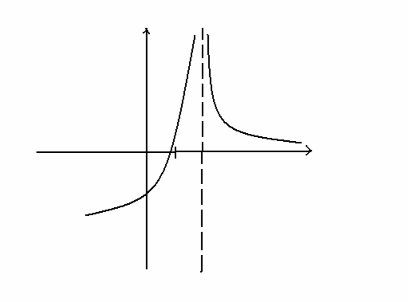
DEF Un asintoto è una retta alla quale il grafico di una funzione si *avvicina all'infinito*.

Gli asintoti che ci riguardano sono di due generi:

- **verticali**: ogni funzione può averne tanti (per esempio la funzione tangente ha addirittura infiniti asintoti verticali)
- **non verticali:** sono al più due: uno *per x che tende* a $+\infty$ e uno *per x che tende* a $-\infty$)

♦ GLI ASINTOTI VERTICALI

Un asintoto verticale si ha in tutti i casi in cui il "***limite*** *per x che tende ad* ***a***" (con ***a*** indichiamo un determinato numero reale) è **infinito**.



Cioè in tutti quei casi in cui più le **ascisse** si avvicinano a quel valore ***a*** (da *destra* o da *sinistra* che sia), tanto più le **ordinate corrispondenti** (nel grafico) "esplodono" verso valori sempre più grandi (in **modulo**: per l'individuazione del segno vedi l'esempio che segue più avanti).

I punti del grafico, corispondenti a valori di x sempre "più vicini" ad ***a***, *tendono ad avvicinarsi alla retta* di equazione: $x = a$.

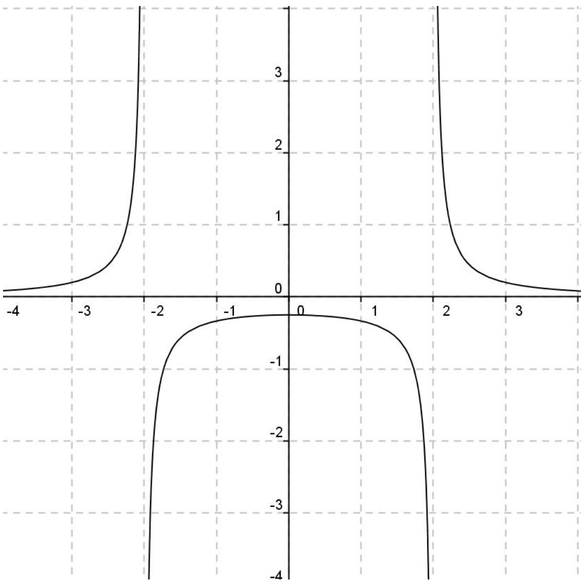
Nelle **frazioni algebriche** per ogni valore che annulla il denominatore, e non il numeratore, c'è un asintoto verticale. L'asintoto verticale è un **muro invalicabile** che non può essere attraversato (altrimenti si tradirebbe la *clausola restrittiva* della definizione di funzione).

Facciamo un **esempio** analizzando il grafico della funzione di equazione: $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

Nei punti 2 e -2, la funzione non è definita e si ha:

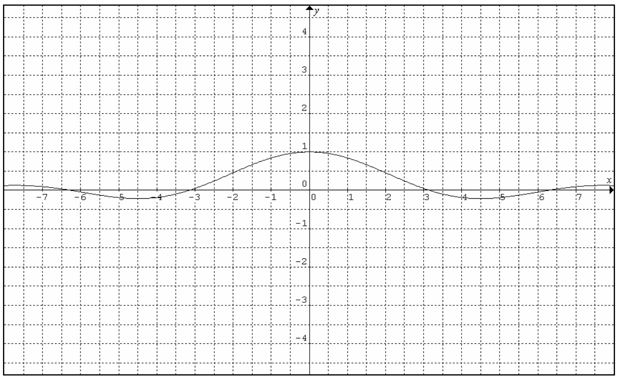
$$\lim_{x \to +2^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$$

Nota che il grafico, a seconda dei casi, va a $+\infty$ oppure $-\infty$: dipende dal "**segno della funzione**". Il grafico della funzione ha due asintoti verticali: $\boldsymbol{a_1}$: $x = -2$ e $\boldsymbol{a_2}$: $x = 2$.



GLI ASINTOTI NON VERTICALI

Gli asintoti **non** verticali sono anch'essi delle rette alle quali il grafico della funzione si avvicina, ma non hanno la caratteristica di **invalicabilità** che caratterizza quelli verticali.



Consideriamo per esempio la funzione $y = \frac{\sin x}{x}$. Il grafico di *sinx* oscilla tra -1 e +1, ma se lo si divide per *x* è come se si dividesse questa quantità per un numero sempre più grande.

Come possiamo notare, il grafico è come se fosse un'oscillazione che si smorza e si ha $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ In questo caso l'asintoto orizzontale (y=0) viene valicato più volte.

Gli **asintoti non verticali** sono di due tipi: ***- orizzontali - obliqui***

♦ ASINTOTI ORIZZONTALI

Si ha un asintoto orizzontale tutte le volte che: $\lim_{x\to\infty} f(x) = k \in R$

Tale asintoto ha allora equazione y=*k*.

Per quanto riguarda le **funzioni razionali fratte**, si ha un asintoto orizzontale quando il grado del numeratore è minore o uguale al grado del denominatore $\rightarrow gr(NUM) \le gr(DEN)$.

- In particolare se gr(NUM)<gr(DEN) la retta di equazione: y=**0** è asintoto orizzontale
- Se invece gr(NUM)=gr(DEN) la retta di equazione: y= a_1/a_2 è un asintoto orizzontale (per la **dimostrazione** vedi ultima pagina)

Dove a_1 è il coefficiente del termine di grado massimo del numeratore e a_2 è il coefficiente del termine di grado massimo del denominatore.

ESEMPIO 1

$$y = \frac{x-1}{x^2+2} \rightarrow \lim_{x\to\infty} y = 0 \rightarrow y = 0$$ è un asintoto orizzontale

ESEMPIO 2

$$y = \frac{3x^2}{2x^2+1} \rightarrow \lim_{x\to\infty} y = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}$$ è un asintoto orizzontale

ESEMPI0 3

$$y = \frac{1-5x+7x^3}{x^2-11x^3} \rightarrow \lim_{x\to\infty} y = -\frac{7}{11}$$ è un asintoto orizzontale

GLI ASINTOTI OBLIQUI

Una **funzione razionale fratta**, ha un asintoto obliquo ⇔ gr(NUM)=gr(DEN)+1 perché:

- l'individuazione di un asintoto obliquo ha a che fare con la divisione fra polinomi,
- un asintoto obliquo è rappresentato da un polinomio e **grado 1** (una retta),
- effettuando la divisione tra un polinomio di grado **n** e un altro di grado **n-1** ottengo necessariamente un resto di **grado1** cioè quel che volevo.

ESEMPIO 4

$$y = \frac{x^2-5x+6}{x-1}$$

Per cercare l’asintoto obliquo si effettua la divisione: $x^2-5x+6 \div x-1$

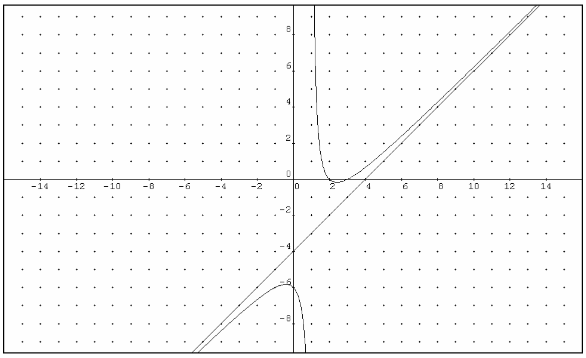
$$
\begin{array}{l|l}
x^2 -5x +6 & x-1 \\
\underline{x^2 - x} & \\
\text{--------------} & x-4 \\
\quad -4x & \\
\quad -4x+4 & \\
\quad \text{------------} & \\
\qquad\quad 2 &
\end{array}
$$

Si ha perciò: $x^2-5x+6 = (x-1)(x-4)+2$.

Dividendo entrambe le parti per x-1 si ottiene: $\frac{x^2-5x+6}{x-1} = x-4+\frac{2}{x-1}$

Quando si va al limite per x che tende all’infinito , la parte $\dfrac{2}{x-1}$ tende a 0.

Allora tutta questa funzione tende a diventare x-4,dunque si avvicina alla retta di equazione: y=x-4, che è l’asintoto obliquo.



Esercizi

Disegna il grafico delle seguenti funzioni:

$y=\frac{1}{2}x-3$ $\quad$ $y=|x^2-x-6|$ $\quad$ $y=\frac{1}{x^2-x-6}$ $\quad$ $y=-\frac{1}{x^2+1}$

$y=\frac{4x+3}{2x-2}$ $\quad$ $y=\frac{4x^2-1}{2x-2}$ $\quad$ $y=\frac{2x-2}{4x^2-1}$ $\quad$ $y=\frac{x^2}{x^2+1}$

$y=\frac{x(x-1)(x+3)}{x^2-6x+8}$ $\quad$ $y=\frac{x^2-6x+8}{x(x-1)(x+3)}$

DIM del fatto che, in una funzione razionale fratta, sse gr(NUM)=gr(DEN), la retta di equazione: y= ***a₁*** / ***a₂***, con ***a₁*** coefficiente del termine di grado massimo del numeratore e ***a₂*** coefficiente del termine di grado massimo del denominatore, è **asintoto orizzontale**.

$$
y=\frac{a_1\cdot x^2+b_1\cdot x+c_1}{a_2\cdot x^2+b_2\cdot x+c_2}=\frac{x^2\cdot(a_1\cdot+\frac{b_1}{x}+\frac{c_1}{x^2})}{x^2\cdot(a_2\cdot+\frac{b_2}{x}+\frac{c_2}{x^2})}=\frac{(a_1\cdot+\frac{b_1}{x}+\frac{c_1}{x^2})}{(a_2\cdot+\frac{b_2}{x}+\frac{c_2}{x^2})}
\qquad
\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(a_1\cdot+\frac{b_1}{x}+\frac{c_1}{x^2})}{(a_2\cdot+\frac{b_2}{x}+\frac{c_2}{x^2})}=\frac{a_1}{a_2}
$$

IL risultato del limite è $\frac{a_1}{a_2}$ Perché i termini con ***x*** al denominatore, al crescere *indefinitamente* del numero ***x***, divengono sempre più piccoli, cioè *tendono* a 0, e quindi “resta” solo il rapporto fra ***a₁*** e ***a₂***