Sintassi dello studio di funzione

Lavoriamo a perfezionare quanto sapete sinora. D'ora innanzi pretenderò che i risultati che ottenete li SCRIVIATE in **forma corretta** dal punto di vista **grammaticale**.

Data la funzione: $f(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$, bisogna trovare l'**I.D.** (Insieme di Definizione); le **intersezioni eventuali** con l'*adx* e l'*ady* e **positività** e **negatività** della funzione.

Tranne l'intersezione con l'*ady*, tutti gli altri aspetti sopra indicati possono essere ricavati effettuando lo **studio del segno**. Cioè risolvendo l'equazione: $\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0$.

Risoluzione della disequazione: ***N(x)* ≥ 0**

- **1^ grado**: si risolve <u>direttamente</u> senza passare dall'equazione associata; [es. $3x+6\geq0$ => $N \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$]. Attenzione al caso in cui il <u>coefficiente di ***x*** è negativo</u>.
- **2^ grado** [es. $3x^2+6 \geq 0$]: si risolve passando all'equazione associata [es. $3x^2+6 =0$]
  - **Δ > 0** L'equazione associata ammette due soluzioni reali distinte: $x_1 \neq x_2$

    se ***a*** > 0 $N(x) \geq 0 \Leftrightarrow x < x_1 \vee x>x_2$

    se ***a*** < 0 $N(x) \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$
  - **Δ = 0** L'equazione associata ammette due soluzioni reali coincidenti: $x_1=x_2$

    se ***a***>0 $N(x) \geq 0$ $\forall x \in \Re$: le y della curva rappresentativa del polinomio N(x), una parabola tangente all'*adx*, con concavità rivolta verso l'alto, ha punti che hanno tutti ordinate positive o nulle (solo per $x = x_1$)

    se ***a***<0 $N(x) \geq 0$ solo per $x = x_1$. $N(x) \geq 0$ a parole, infatti, significa: *"per quali valori delle x le y corrispondenti sono positive o nulle?"* Se Δ = 0 e ***a***<0, ***N(x)*** è rappresentato graficamente da una parabola tangente all'*adx*, con concavità rivolta verso il basso, i cui punti che hanno tutti ordinate NEGATIVE e nulle solo per $x = x_1$.
  - **Δ < 0** Non esiste soluzione reale dell'equazione associata.

  se ***a***>0 $N(x) > 0$ $\forall x \in \Re$: nessun valore di x annulla N(x) e le **ordinate** della curva associata a N(x) – una parabola senza intersezioni con l'*adx* e avente concavità rivolta verso l'alto – sono **tutte positive**.

  se ***a***<0 $N(x) \geq 0$ $\neg\exists x \in \Re$ nessun valore di x annulla N(x) e le **ordinate** della curva associata a N(x) – una parabola senza intersezioni con l'*adx* e avente concavità rivolta verso il basso – sono **tutte negative**.
- **Grado superiore al 2°**: N(x) va <u>scomposto</u> in polinomi di grado inferiore (vedi casi precedenti). Alcuni polinomi posso essere scomposti tramite:
  - Differenza di cubi $A^3 – B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$
  - Somma di cubi $A^3+B^3 = (A+B)(A^2 – AB+B^2)$
  - Differenza di quadrati $A^2 –B^2 = (A+B)(A-B)$

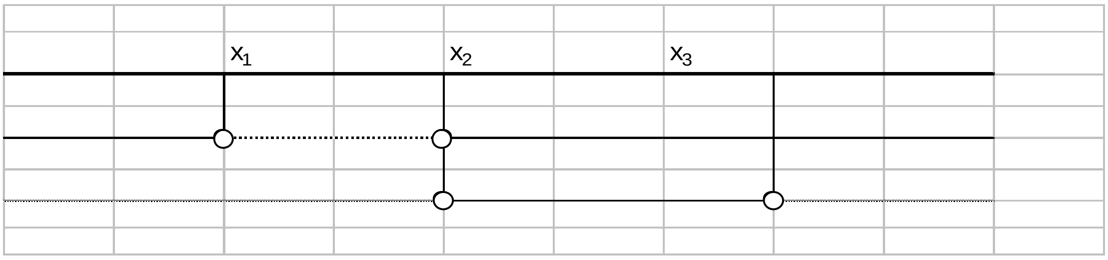
N.B.1: Il *falso quadrato*: $A^2 \pm AB+B^2$ è sempre positivo e non ulteriormente scomponibile.

N.B.2 La *somma di quadrati*: A^2+B^2 è sempre positiva e non ulteriormente scomponibile

D(x)* ≥ *0 segui lo stesso procedimento di ***N(x)* ≥ *0***

I.D.= ***R***\{eventuali valori di ***x*** che annullano il denominatore}

Ora bisogna fare il **grafico** della **disequazione**:



-	0	+	X	+		X	-
	$\cap adx$		IND.			IMP. *asintoto verticale*	
	$\frac{0}{n}$		$\frac{0}{0}$			$\frac{n}{0}$	

Sotto agli zeri del denominatore va specificato quando la determinazione del valore di ***f(x)*** è **impossibile**, "imp." (lo zero in questione annulla solo il denominatore) o **indeterminata**, "ind." (lo zero in questione annulla sia il numeratore sia il denominatore).

Dopo aver effettuato lo **studio** del **segno** è possibile scrivere:

- eventuali **intersezioni con l'asse delle ascisse**.Quei **punti** che hanno per **ascisse** gli **zeri** del **numeratore** che NON annullano anche il denominatore. Vanno indicati con entrambe le coordinate: sono punti!

- eventuali **intersezioni con l'asse delle ordinate**. Quei punti che hanno come ascissa 0 e come ordinata il numero reale, se c'è, che si ottiene sostituendo 0 al posto delle x della funzione e facendo i conti.

Dopodiché i passa al calcolo dei **limiti**.

Innanzitutto il $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ che va calcolato SEMPRE!!! L'esito di questo limite sarà differente a seconda della relazione fra **grado** del **numeratore** (d'ora innanzi: *grN(x)*) e **grado** del **denominatore** (d'ora innanzi: *grD(x)*)

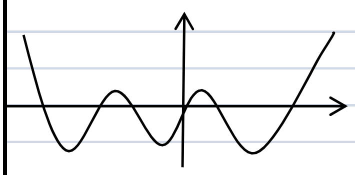
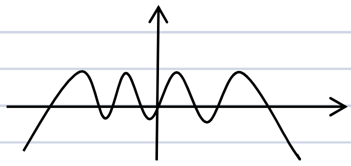
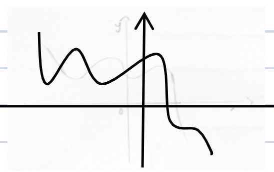
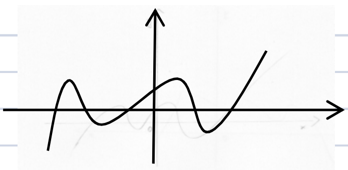
- SSe ***grN(x) ≤ grD(x)***:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ con $l \in \Re$

In particolare, se *grN(x) < grD(x)* allora: *l* = 0; altrimenti sarà un numero diverso da 0 dato dal rapporto fra i coefficienti dei termini di grado massimo di N(x) e D(x).

- SSe ***grN(x) > grD(x)***, il modulo del limite sarà infinito $\lim_{x \to \pm\infty} |f(x)| = \infty$.

Per stabilire il **segno** del limite, e se si possa calcolare un limite solo o se ne debbano calcolare due distinti, puoi seguire lo schema indicato nella tabella seguente:

Segno di f(x)	+ +	- -
Limiti	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$
Esempi	$f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2+1}$	$f(x) = -\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$
Grafici		
Segno di f(x)	+ -	- +
Limiti	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Esempi	$f(x) = -\dfrac{x^3}{x^2+1}$	$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$
Grafici		

Posizione della curva rispetto all'asintoto orizzontale (se presente).

Abbiamo visto, in particolare,che se ***grN(x)* = *grD(x)***: la curva ha un **asintoto orizzontale:** *y=**l*** diverso dall'*adx* (*adx* che invece è asintoto orizzontale nel caso *grN(x)<grD(x)*).

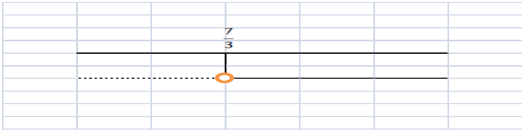
Per conoscere la ***posizione*** della curva rispetto all'asintoto (in corrispondenza di quali valori di ***x*** <u>i punti della curva stanno "sopra"</u> i punti dell'asintoto, in corrispondenza di quali valori di ***x*** <u>i punti della curva stanno "sotto" i punti dell'asintoto</u> e in corrispondenza di quali valori di ***x*** <u>i punti della curva coincidono con punti dell'asintoto (cioè la curva taglia, interseca, attraversa, l'asintoto</u>), devi risolvere la seguente **disequazione**:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \geq l \Leftrightarrow \frac{N(x)}{D(x)} - l \geq 0 \Leftrightarrow \frac{N(x) - l \cdot D(x)}{D(x)} \geq 0$$

Esempio:

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2+4x+6} \geq 1 \qquad \frac{x^2+2x-8-x^2+4x+8}{x^2+4x+6} \geq 0 \qquad \frac{6x-14}{x^2+4x+6} \geq 0$$

Il denominatore ha Δ<0 e ***a***>0 perciò è sempre positivo e non si annulla mai.



\-   0   +

Per risolvere una disequazione fratta bisogna trasformarla in ***disequazioni equivalenti*** fino a ottenere la forma in cui a destra del segno "≥" c'è lo 0.

In queste trasformazioni si rischia di perdere di vista quello che si stava cercando, oppure di non saper leggere correttamente la soluzione della disequazione.

La disequazione originaria l'avevamo scritta per rispondere alla seguente domanda: "Per quali valori di ***x***, le ordinate corrispondenti (dei punti della curva) sono maggiori o uguali a ***l*** (che è l'ordinata dei punti dell'asintoto; nell'esempio ***l****=1*)?".

Ovviamente per i valori di ***x*** che non verificano la richiesta, avremo comunque un'informazione: per quei valori infatti le ordinate corrispondenti (dei punti della curva) sono MINORI di ***l*** e perciò i punti della curva staranno "sotto" l'asintoto.

Vediamo ora come ***leggere la soluzione*** della ***disequazione***:

per ***x*** < 7/3 la disequazione non è verificata (valore negativo delle y, perciò risposta negativa alla nostra domanda iniziale) quindi la curva passa sotto l'asintoto,

per ***x*** = 7/3 y=0 perciò la la curva taglia l'asintoto e

per ***x*** > 7/3 (valore positivo delle y, perciò risposta positiva alla nostra domanda iniziale) la curva passa sopra l'asintoto orizzontale.

Cosa fare se, nello studio del segno, trovi un valore che annulla sia il numeratore che il denominatore: il caso $\frac{0}{0}$

DEF (pag 165 del libro) Il **numero** di soluzioni che coincidono in un solo valore dà la **molteplicità** di quella soluzione.

ES: nel polinomio: $(x-3)^2$, il valore **3** è uno **zero** del polinomio con **molteplicità 2**. Infatti $x_1=x_2=3$, perciò ci sono **due** *soluzioni* dell'equazione associata al polinomio che *coincidono* in un solo *valore*: il numero 3.

Nel caso più generale, nel polinomio: $(x-\mathbf{a})^n$ il *numero* ***a*** è uno zero del polinomio con molteplicità **n**.

Chiamando $\boldsymbol{x_0}$ il valore che annulla sia *N(x)* che *D(x)*, ricordando che $\boldsymbol{x_0}$ è uno ***zero*** con ***molteplicità n*** del polinomio ***p(x)*** *se e solo se*: $\boldsymbol{p(x) = (x - x_0)^n \cdot l(x)}$ (THM di Ruffini), con gr***p(x)***=***n***+gr***l(x)*** e indicando, per sinteticità **"**la molteplicità di $\boldsymbol{x_0}$ al Numeratore" con: molt$(\boldsymbol{x_0})_{N(x)}$ e "la molteplicità di $\boldsymbol{x_0}$ al Denominatore" con: molt$(\boldsymbol{x_0})_{D(x)}$ e ci sono tre casi:

1) molt$(\boldsymbol{x_0})_{N(x)}$ > molt$(\boldsymbol{x_0})_{D(x)}$ ⇔ $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$

DIM Poniamo molt$(\boldsymbol{x_0})_{N(x)}$=***n+k*** e molt$(\boldsymbol{x_0})_{D(x)}$=***n*** → $\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)^{n+k}\cdot p(x)}{(x-x_0)^n\cdot q(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)^k\cdot p(x)}{q(x)}=0$

ES1 $\lim_{x\to1}\frac{3x^3-6x^2+3x}{4x^2-4}=\lim_{x\to1}\frac{3\cdot x\cdot(x-1)^2}{4\cdot(x+1)\cdot\left(x-1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3\cdot x\cdot(x-1)}{4\cdot(x+1)}=\frac{3\cdot1\cdot0}{4\cdot2}=\frac{0}{8}=0$

2) <u>molt(***x₀***)$_{N(x)}$</u>= <u>molt(***x₀***)$_{D(x)}$</u> $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0}f(x)=l,l\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

DIM Poniamo molt($\boldsymbol{x_0}$)$_{N(x)}$ = ***n*** e <u>molt($\boldsymbol{x_0}$)$_{D(x)}$</u> = ***n*** → $\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)^n\cdot p(x)}{(x-x_0)^n\cdot q(x)}=\frac{p(x_0)}{q(x_0)}=l$

ES2 $\lim_{x\to1}\frac{3x^3-6x^2+3x}{4x^2-8x+4}=\lim_{x\to1}\frac{3\cdot x\cdot(x-1)^2}{4\cdot\left(x-1\right)^2}=\lim_{x\to1}\frac{3\cdot x}{4}=\frac{3\cdot1}{4}=\frac{3}{4}$

3) <u>molt($\boldsymbol{x_0}$)$_{N(x)}$</u>< <u>molt($\boldsymbol{x_0}$)$_{D(x)}$</u> $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\infty$ <u>per il **segno** si veda il grafico dei segni.</u>

DIM Poniamo molt($\boldsymbol{x_0}$)$_{N(x)}$=***n*** e <u>molt($\boldsymbol{x_0}$)$_{D(x)}$</u>=***n+k*** → $\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)^n\cdot p(x)}{(x-x_0)^{n+k}\cdot q(x)}=\lim_{x\to x_0}\left|\frac{p(x)}{(x-x_0)^k\cdot q(x)}\right|=\infty$

ES2 $\lim_{x\to1}\frac{3x^2-6x}{4x^2-8x+4}=\lim_{x\to1}\frac{3\cdot x\cdot(x-1)}{4\cdot\left(x-1\right)^2}=\lim_{x\to1}\frac{3\cdot x}{4\cdot(x-1)}=+\infty$ verifica dallo studio del segno della funzione che sia +∞. La retta di equazione: *x=1* è **asintoto verticale** della curva.