Funzioni

DEF Dati due insiemi "**A**" e "**B**" si chiama **funzione** **"**da **A** a **B**" (in simboli: ***f***: **A** → **B**) una **corrispondenza univoca** tra due insiemi.

Cioè una funzione è una **legge** che mette in relazione *qualche* elemento di **A** con *qualche* elemento di **B** con la seguente "**clasuola restrittiva**": a ciascun elemento di **A** può essere associato *al più* un solo elemento di **B** . Capirai meglio dagli gli esempi.

DEF L'insieme **A** si chiama **Dominio** e l'insieme **B** si chiama **Codominio**

DEF L'insieme degli elementi di **A** "chiamati in causa da questa legge" (per i quali cioè la funzione è **definita**) si chiama **Insieme di definizione** della funzione e lo indicheremo con $D_f(A)$, D_f o $I.D._f$

$$D_f(A) \subseteq A$$

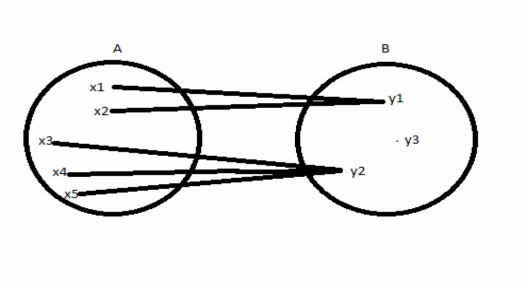
DEF L'insieme degli elementi di **B** associati dalla funzione agli elementi del **Insieme di Definizione** si chiama **Immagine** di *A tramite f*, o, *tout court*, di ***f*** e lo indicheremo come ***f(A)*** (***f***(D_f(A)) sarebbe "ridondante")

$$f(A) \subseteq B$$

Avendo queste nuove parole possiamo esprimere la "clausola restrittiva inq uesto modo: "ogni elemento ***x*** dell'*insieme di definizione di **f*** ha un'unica ***immagine y***=***f***(***x***) nel *codominio*.

N.B.1. Il caso in cui <u>più elementi</u> di **A** siano associati ad <u>uno stesso elemento</u> **B**, rispetta la definizione di funzione. Ecco qui un esempio

ES 1.1

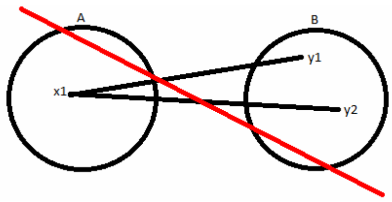


ES 1.2 **A**={bambini/e}; **B**={donne} ***f***: "essere figlio naturale di"

Più bambini/e possono essere associati alla stessa mamma! Non tutte le donne sono madri.

N.B.2. Il caso in cui ad <u>un elemento</u> di **A** siano associati <u>più elementi</u> di **B** NON rispetta la definizione di funzione.

ES 2.1 (**CONTRESEMPIO**)

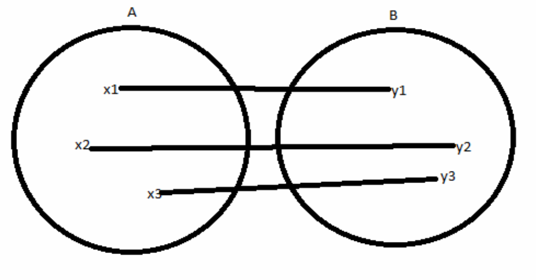


ES 2.2 (**CONTRESEMPIO**) **A**={donne}; **B**= {bambini/e}; ***f***: "essere mamma di" NON è una funzione perché ogni donna che sia madre può essere associata anche a più bambini/e.

Ora che (spero) sia chiaro cosa sia una funzione e cosa no, passiamo alle caratteristiche di una funzione, ai vari "tipi" di funzione che potete incontrare:

DEF Una funzione si dice **biiettiva** (o **corrispondenza biunivoca**) se ad ogni elemento di **A** corrisponde uno ed un solo elemento di **B**, e ad ogni elemento di **B** corrisponde uno ed un solo elemento di **A**.

ES 5.1



ES 5.2

A: {frecce (<u>una per ogni arciere</u>)}

B: {bersagli}

f : "gara di precisione" (ogni arciere deve colpire il proprio bersaglio con una freccia soltanto!)

ES 5.3 (Maraschini) Cittadini e codici fiscali

Alcuni esempi di funzioni reali di variabile reale (A = B = *R*):

Innanzitutto va detto che, nel caso di **funzioni reali di variabile reale**, la "legge" che definisce la funzione, se è sufficientemente "regolare", può essere espressa mediante un'**equazione matematica** del tipo: $y=f(x)$ che si legge: "***y*** è uguale a effe di ***x***" ($x \in D_f$ (*R*) e $y \in f$(*R*)).

DEF Data una funzione reale di variabile reale, di equazione: $y=f(x)$, si dice **grafico della funzione** l'insieme delle coppie ordinate $(x\ ;\ f(x))$, cioè l'insieme delle soluzioni dell'equazione che rappresenta la funzione. Essendo coppie ordinate di numeri reali possono corrispondere a **punti del piano cartesiano** e dare origine quindi ad una **curva** del piano cartesiano stesso.

N.B. Quasi sempre c'è una confusione di linguaggio e tale **curva** viene indicata come il **grafico** della funzione. Anche noi abbiamo fatto così e continuerò ad utilizzare tale convenzione.

<u>**N.N.B.** Dalle caratteristiche del grafico si può risalire alle caratteristiche della funzione.</u>

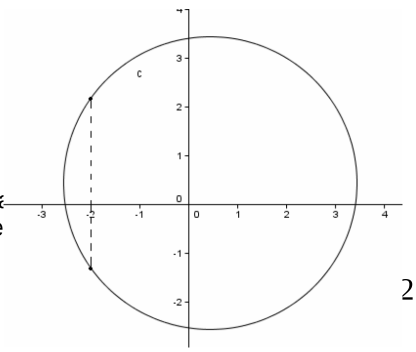
ES 6.1 Il **grafico** della funzione di equazione: $y = m\cdot x + q$, una **retta** non parallela[1] all'asse delle *y*, ci dice che la funzione è <u>definita su tutto ***R***</u> ed è una funzione <u>biiettiva</u>.

Ad ogni elemento di **A** (le ascisse dei punti che costituiscono la retta), corrisponde infatti un elemento di **B** (le ordinate dei punti che costituiscono la retta), e viceversa.

Ad ogni "***x***" corrisponde dunque una sola "***y***", e viceversa ad ogni "***y***" corrisponde una sola "***x***".

Ad ogni ascissa viene infatti associata un'ordinata corrispondente e viceversa.

ES 6.2 (Controesempio) Il **grafico** corrispondente all'equazione: $x^2+y^2+a\cdot x+b\cdot y+c=0$, una **circonferenza**, ci dice che <u>non</u> siamo

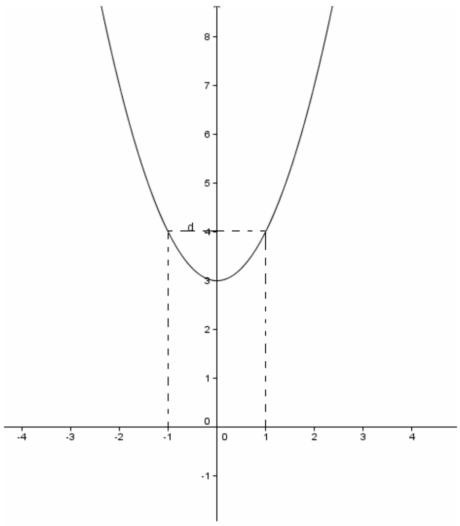


[1] **Contresempio**: una retta parallela all'*ady*, cioè il grafico della funzione di equa <u>funzione</u>. Non rispetta infatti la "clausola restrittiva": ad un solo punto dell'insie punti dell'insieme **B**!

in presenza di una funzione.

Abbiamo detto infatti che il caso in cui a un elemento del dominio $\mathbf{D}_f$ (**A**) (per una circonferenza $\mathbf{D}_f$ (**A**) $\equiv$ intervallo chiuso avente per estremi le ascisse degli estremi del diametro) vengano associati più elementi dell' insieme **B** non rispetta la definizione di funzione, e questo caso si verifica proprio per la circonferenza. Come vedi in figura ad ogni ascissa interna al dominio (estremi esclusi) corrispondono due ordinate!

ES 6.3 Il **grafico** della funzione di equazione: $y=\boldsymbol{a}\cdot x^2+\boldsymbol{b}\cdot x+\boldsymbol{c}$, una **parabola**, ci dice che la funzione è definita su tutto ***R*** (l' **I.D.** è l'insieme dei numeri reali) ma **non suriettiva** poiché vi sono alcuni elementi di **B** che non sono immagini di alcun elemento dell' **I.D.**. **L'immagine** infatti è data dalle ordinate maggiori di y_V se $\boldsymbol{a}>0$ o minori di y_V se $\boldsymbol{a}<0$).



Succede dunque che alcune "***y***" rimarranno "sole".

Nella parabola in figura vediamo ad esempio che tutte le ordinate minori di 3 non sono immagine di nessuna *x*.

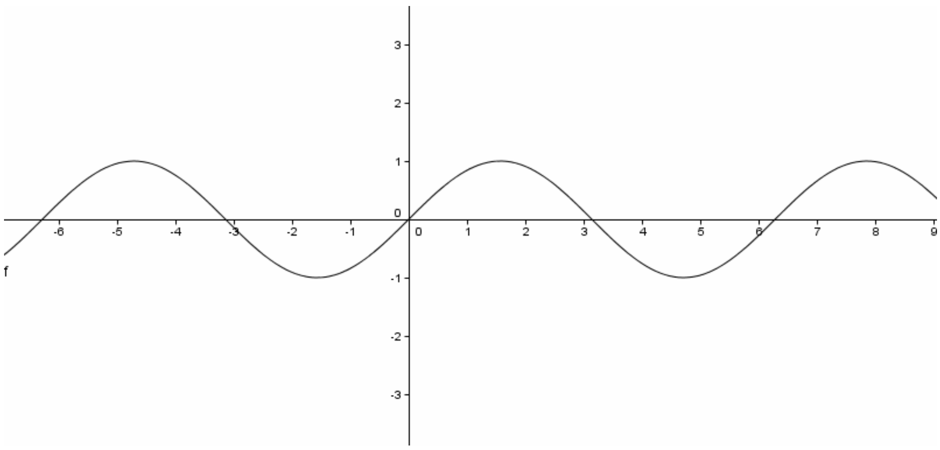
La parabola $y=\boldsymbol{a}\cdot x^2+\boldsymbol{b}\cdot x+\boldsymbol{c}$ **non** è neanche **iniettiva** poiché a ogni elemento dell'**immagine**, diverso da y_V, sono associati due elementi differenti dell' **I.D.**.

Come vediamo in figura ad esempio all'ascissa x=1 corrisponde l'ordinata y=4, e all'ascissa x=-1 corrisponde l'ordinata y=4.

Succede dunque che non si verifica la condizione secondo cui a differenti elementi dell'insieme **A** corrispondano differenti elementi dell'insieme **B**.

ES 6.4 Il grafico della funzione di equazione *y*= ***sen****x* ci dice che la funzione, che è definita su tutto ***R,*** non è **suriettiva** infatti alcuni valori di "***y***" (più precisamente quelli minori di -1 o maggiori di +1) non sono immagine di alcuna "***x***", dunque alcuni elementi dell'insieme **B** non sono immagine di alcun elemento dell'insieme **A**. **L'immagine** è: [-1;+1]

Come vediamo in figura infatti quando "y" vale 2 (oppure -2) non è immagine di alcuna "x".



La funzione di equazione: *y*= ***sen****x* non è neanche iniettiva poiché a differenti elementi dell' **I.D.** corrisponde lo stesso elemento del **immagine**.

Ad esempio il valore y = ½ dell' **immagine** corrisponde a un'infinità numerabile di valori dell' **I.D.**: $x=(\pi/6)+2k\pi$ o $x=(5\cdot\pi/6)+2k\pi$, con k numero intero (dovreste saperlo dall'altr'anno...)