LIMITI DI SUCCESSIONI FRATTE

Per distinguere, al crescere di ***n***, i tre diversi “comportamenti” di una successione:

1) **divergente** (per ***indici*** superiori a un certo valore i ***moduli dei termini corrispondenti*** sono “sempre più grandi”),

2) **convergente** (per ***indici*** superiori a un certo valore i ***moduli dei termini corrispondenti*** sono sempre “più vicini a uno stesso valore”),

3) **irregolare** (nessuna delle due condizioni precedenti),

si possono seguire tre metodi che vado a richiamare in queste pagine. In relazione al primo ci si può aiutare con la calcolatrice o, meglio, con il software **Microsoft Excel** che consente di effettuare conti anche molto complessi, con poca fatica e rapidamente.

Prendiamo come esempio il limite seguente: $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+1}{5n-7}$

Metodo della tabella

Il **primo metodo**, semplice ma che richiede sicuramente molto tempo (specialmente non avendo a disposizione Excel), consiste nello scegliere degli **indici** (numeri naturali), sempre più grandi e andarsi a calcolare i **termini corrispondenti**.

Prendiamo per esempio 0 e le potenze di 10 fino a 100.000, le sostituiamo a ***n*** nella successione ed effettuiamo i calcoli (interessante confrontare l’andamento del numeratore e del denominatore, ma NON NECESSARIO alfine del calcolo del limite).

n	***0***	***1***	***10***	***100***	***1000***	***10.000***	***100.000***
N	*1*	*5*	*311*	*30101*	*3001001*	*300010001*	*30000100001*
D	*-7*	*-2*	*43*	*493*	*4993*	*49993*	*499993*
N/D	***-0,143***	***-2,5***	***7,23***	***61,057***	***601,04166***	***6001,0402***	***60001,04002***

Osservando l’ultima riga, ci accorgiamo come i **termini della successione** crescano al crescere dell’indice, a partire dall’indice 10 in poi, cioè la succession è **divergente**.

Questo fatto si esprime in smboli scrivendo che il limite della successione è: “più infinito”.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+1}{5n-7} = +\infty$$

Per ottenere i valori della tabella precedente ho lavorato con Excel in una maniera leggermente differente da quella vista insieme. Ho messo infatti i valori in orizzontale. Poi ho selezionato l’area contenente i valori e l’ho copiata sopra.:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	0	1	10	100	1000	10.000	100.000
2	N	=3*b1^2+b1+1	Poi copincolla o trascina in orizzontale la crocetta che appare in basso a destra nella cella					
3	D	=3*b1+1						
4	N/D	=b2/b3						

RIBADISCO: La successione è **divergente** perché al crescere degli indici, crescono sempre più i *moduli* dei **termini corrispondent**i.

Metodo algebrico

Il **secondo metodo** risulta anch'esso molto facile e, in più, è veloce; infatti quella che abbiamo chiamato "Regola Rigida" consiste nel raccogliere a fattor comune il termine con l'esponente maggiore del numeratore e il termine con l'esponente maggiore del denominatore[1]; eseguire semplificazioni dove possibile e, successivamente – ricordando che: il limite di una **combinazione lineare**[2] è la combinazione lineare dei limiti; il limite di un **prodotto** è il prodotto dei limiti; il limite di un **quoziente** è il quoziente dei limiti – individuare l'andamento del limite.

E' fondamentale, per risolvere i limiti con il "metodo algebrico", aver capito che tutti i termini che hanno n al denominatore con qualunque esponente (ES $\frac{1}{n};-\frac{7}{n};\frac{1}{n^2}$) **convergono** a 0 poiché, al crescere di ***n***, danno origine a frazioni sempre più piccole, positive o negative che siano, che non raggiungono mai lo zero ma vi si avvicinano *definitivamente.*

Perciò il limite della successione fratta $\left\{\frac{3n^2+n+1}{5n-7}\right\}$ è uguale al limite della successione $\left\{\frac{3}{5}n\right\}$ (che, ovviamente, **diverge** perché, al crescere degli indici, crescono i termini corrispondenti). Vediamo come mai, applicando la Regola Rigida:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{5n-7}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\cancel{2}}\cdot(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{\cancel{n}\cdot(5-\frac{7}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5}\cdot n=+\infty$$

Metodo del confronto fra ordini d'infinito

Il terzo metodo è rapido, e quasi "automatico", in quanto consiste nell'*osservare* la successione stessa per determinarne l'andamento. Infatti abbiamo visto come non tutte le successioni vadano all'infinito con la stessa **velocità**[3]. In particolare si può stilare (e si DEVE imparare) una classifica di velocità di andamento all'infinito:

---

1 **Attenzione**: tecnicamente si esegue come un normale raccoglimento a fattor comune, ma la RESA è molto differente! Compaiono infatti indici al denominatore. Ed è proprio questo che porta alla risoluzione del limite.

2 **DEF combinazione lineare**. Dati degli elementi (variabili, polinomi, funzioni, vettori, successioni, ecc): **A**, **B**, **C** e dati dei numeri: α, β, γ, si dice combinazione lineare di **A**, **B** e **C** il seguente elemento: **α·A + β·B + γ·C** ottenuto moltiplicando ciascuno degli elementi A, B e C per un numero e sommando fra loro i risultati ottenuti. "Il limite di una **combinazione lineare** è la combinazione lineare dei limiti" in simboli si scrive: $\lim_{n\to\infty}(\alpha\cdot A+\beta\cdot B+\gamma\cdot C)=\alpha\cdot\lim_{n\to\infty}A+\beta\cdot\lim_{n\to\infty}B+\gamma\cdot\lim_{n\to\infty}C$

3 Per capire questo concetto abbiamo visto che può essere comodo considerare – "alla fisica" – i valori degli indici come valori di **tempo** e i valori dei termini corrispondenti come valori di **distanza**. In questo modo, per esempio, si può ben vedere fra la successione $a_n=3n$ e la successione $b_n=4n$ quale sia la **più veloce**: quella che, nello stesso tempo – e partendo dallo stesso START – percorre maggiore distanza. Per n=10 $a_{10}=30$ e $b_{10}=40$ perciò b_n è più **veloce**.

1) Esponenziali (**ES** 2^n)	Maggiore è la base maggiore la velocità
2) Polinomi (comanda il termine di grado maggiore)	Maggiore è il grado maggiore è la velocità
	A parità di grado: maggiore è il coefficiente del termine di grado massimo, maggiore è la velocità
3) Logaritmi[4] (**ES** $\log_2 n$)	Minore è la base maggiore è la velocità

In caso di successioni fratte:

- se la successione al numeratore è più veloce della successione al denominatore la **successione fratta diverge** (il segno è dato dal rapporto fra il segno del termine più veloce del numeratore e il segno del termine più veloce del denominatore)
- se la successione al denominatore è più veloce della successione al numeratore la **successione fratta converge** a 0
- se le successioni al numeratore e al denominatore hanno la stessa velocità la **successione fratta converge** al rapporto fra il coefficiente del termine *più veloce* del numeratore e il coefficiente del termine *più veloce* del denominatore.

ES con polinomi al numeratore e al denominatore:

- Se il grado del numeratore è maggiore rispetto a quello del denominatore, la successione **diverge**, cioè tende a infinito (c'è da prestare attenzione al SEGNO, però!).

- Se il grado del numeratore è minore rispetto a quello del denominatore, la successione **converge** sempre a 0.

- Se il grado del denominatore è uguale al grado del numeratore, la successione **converge** al rapporto dei coefficienti dei termini di grado massimo. **ES** $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^7-13n+1}{11n^7-4n^5+3n^3}=\frac{5}{11}$.

N.B. In caso di **successioni fratte** se la **successione al numeratore** è **irregolare** ma **limitata** (cioè suoi termini cadono tutti dentro un intervallo limitato ES $\sin n$) e la successione al denominatore è **divergente**, la successione frazione è **convergente** a 0. **ES** $s_n=\frac{\sin n}{n}$.

n	$\frac{\sin n}{n}$
1	0,8414709848
10	-0,0544021111
100	-0,0050636564
1000	0,0008268795
10000	-0,0000305614
100000	0,0000003575
1000000	-0,0000003500

CONTRES1 $t_n=\frac{(-2)^n}{n+1}$ la successione al numeratore è irregolare e illimitata e infatti è irregolare anche la successione t**n**.

CONTRES2/EX Se la successione al numeratore è irregolare, ma limitata, e la successione al denominatore convergente, la successione fratta sarà irregolare. Prova a scriverne qualcuna tu.

4 il **logaritmo** di un **numero** (**argomento** del logaritmo) in una data **base** (**pedice**) è l'**esponente** al quale la base deve essere elevata per ottenere il numero stesso. ES $\log_2 8=3$ (il logaritmo in base 2 di 8 è 3 perché $2^3=8$). La funzione logaritmo in base ***a*** è la funzione inversa della funzione esponenziale in base ***a***.