LE SUCCESSIONI NUMERICHE

Una successione è una **legge** che associa ad ogni numero **naturale** un numero **reale**. $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Chiamiamo gli elementi del primo insieme **indici** (di posizione) e gli elementi del secondo insieme **termini** (della successione). A ogni indice corrisponde un termine. Non è detto che i termini siano differenti fra loro: si possono definire, infatti, **successioni costanti**, composte cioè da termini tutti uguali.

Posso scrivere la **legge** suddetta (si tratta di una legge matematica), in uno dei seguenti modi:

- indicare com'è fatto il termine n-esimo della successione: a_n - cioè con quali calcoli si ottiene. Abbiamo chiamato questa modalità: "**formula sintetica**";
- fornire il primo elemento della successione (a_0), o i primi due, e dire com'è legato – da quali conti – il termine n-esimo (a_n) al termine precedente (a_{n-1}). Abbiamo chiamato questa modalità: "**formula per ricorsione**"

A volte si riescono a scrivere le leggi delle successioni in entrambi i modi, a volte in uno solo dei due.

Abbiamo visto come per i **numeri primi** non si riesca a scrivere una legge in nessun modo perché non si conosce nessuna regolarità generale che consenta di generarli tutto. Alla lettera perciò, quella dei numeri primi non è una vera e propria successione. Vediamo qualche esempio di successione propriamente detta:

ESEMPIO 1

- ***n*** 0 1 2 3 4 5 ***n***
- a_n 1 3 6 10 15 21 ***?***

$\rightarrow$ $\xrightarrow{+2}$ $\xrightarrow{+3}$ $\xrightarrow{+4}$ $\xrightarrow{+5}$ $\xrightarrow{+6}$ $\rightarrow$

A parole: per ottenere il termine n-esimo aggiungo al precedente termine, l'indice successivo (n+1). Non è banale ottenere la ***formula sintetica***. Chiedendo aiuto a un sito potente: http://www.wolframalpha.com/ (e tenendo conto che noi partiamo da indice 0, mentre lui da indice 1), otteniamo: $a_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

In simboli, la formula per ricorsione è: $a_0 = 1$ $\quad a_n = a_{n-1} + n + 1$. Verifichiamolo:

$a_0 = 1$; $a_1 = a_0 + 1 + 1 = 3$; $a_2 = a_1 + 2 + 1 = 6$; $a_3 = a_2 + 3 + 1 = 10$; $a_4 = a_3 + 4 + 1 = 15$

ESEMPIO 2

- $\mathbb{N}$ 0 1 2 3 4 5 ***n***
  a_n 1 4 9 16 25 36 ***$(n+1)^2$***

A parole: ogni termine è il quadrato dell'indice di posizione successivo.

FORMULA SINTETICA: $a_n = (n+1)^2$

OPPURE

A parole: per ottenere ogni termine aggiungo al termine precedente il numero dispari ottenuto moltiplicando per 2 l'indice di posizione e aggiungendo 1.

FORMULA PER RICORSIONE: $a_0 = 1$ $\quad a_n = a_{n-1} + 2n + 1$

Quindi per questa successione è semplice scrivere sia la formula sintetica che quella per ricorsione.

ESEMPIO 3 (successione di Fibonacci)

- $\mathbb{N}$ 0 1 2 3 4 5 6
- a_n 1 1 2 3 5 8 13

A parole: per ottenere ciascun termine, a partire dal terzo, sommo tra loro i 2 termini precedenti.

FORMULA PER RICORSIONE: $a_0 = 0; \quad a_1 = 1; \quad a_n = a_{n-1} + 2n + 1$

Complicato scrivere la **formula sintetica**

ESEMPIO 4

- $\mathbb{N}$ 0 1 2 3 4 5 6 ***n***
- a_n 0 1 3 7 13 21 31 ***n^2- (n-1)***

A parole: per ottenere ogni termine, a partire dal terzo, aggiungo al precedente il numero pari ottenuto moltiplicando per 2 l'indice del precedente. **FORMULA PER RICORSIONE**:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 1; \quad a_n = a_{n-1} + 2 \cdot (n-1)$$

OPPURE

A parole: per ottenere il termine n-esimo (a partire dal secondo) elevo alla seconda il numero di posizione e gli sottraggo il numero di posizione precedente. Cioè in **FORMULA SINTETICA**:

$$a_n = n^2 - (n-1) = n^2 - n + 1$$

ESEMPIO 5

- $\mathbb{N}$ 0 1 2 3 4 5 6 ***n***
- a_n 0 1 5 9 13 17 21 ***4n+1***

A parole: per ottenere ciascun termine aggiungo al precedente 4.

FORMULA PER RICORSIONE: $a_0 = 0; \quad a_1 = 1; \quad a_n = a_{n-1} + 4$

OPPURE

A parole: per ottenere il termine n-esimo aggiungo uno al quadruplo dell'indice precedente.

FORMULA SINTETICA: $a_n = 4 \cdot (n-1) + 1$

Esercizi sulle successioni nei seguenti siti:

http://www.wolframalpha.com/input/?i=sequences

http://www.testdilogica.it/test-di-logica/test-di-logica-con-soluzioni/

http://www.ixl.com/math/algebra-1/number-sequences-mixed-review