APPROFONDIMENTO SULL'INSIEME DEI NUMERI REALI

Si indica con la lettera **R** l'insieme dei numeri **reali**: l'insieme formato dall'unione fra l'insieme dei **numeri razionali Q** (in forma decimale: decimali limitati o periodici) e l'insieme dei numeri **irrazionali I** (numeri esprimibili in forma decimale come decimali illimitati aperiodici). In simboli: **R** = **Q** $\cup$ **I**

#R si chiama **cardinalità del continuo** e si ha: **#R** >**#N**

Con **R** si passa quindi ad un infinito di ordine superiore rispetto a **N**. Ed è: **#R** = $2^{\#\mathbf{N}}$

In che modo si passa dalla **cardinalità del numerabile** alla **cardinalità del continuo** (da **#N** a **#R**)?

Si è visto che un insieme ha **cardinalità numerabile** se può essere messo in corrispondenza biunivoca con **N** oppure se si può trovare un sistema per *mettere in fila*[1] i suoi elementi e *contarli*.

Gli insiemi **Z** e **Q** hanno cardinalità numerabile:

#Z=#N+#N=#N (l'idea di questa operazione nasce dal constatare come sia: **Z= N** $\cup$ **– N**)

#Q = #N x #N = #N (l'idea di questa operazione nasce dalla modalità utilizzata nel *procedimento diagonale* per *mettere in fila e contare* i numeri razionali. Costruendo cioè una tabella che abbia come "lati" i numeri naturali e perciò come "area": **#N** x **#N**)

TESI: Già solo i numeri reali compresi tra 0 e 1 hanno una cardinalità maggiore di quella del numerabile.

DIMOSTRAZIONE Soffermiamoci a ragionare sui numeri reali compresi fra 0 e 1. Se fossero numerabili ci sarebbe un modo per *metterli n fila* e contarli TUTTI. Ad esempio in un modo del genere: $r_1 = 0, a_1a_2a_3\ldots a_n..$; $r_2 = 0,b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$; $r_3 = 0,c_1c_2c_3\ldots c_n\ldots$; ecc Le *lettere con indice* dopo la virgola indicano **numeri naturali.**

La parte decimale in particolare degli irrazionali (i numeri che fanno salire di cardinalità i numeri reali rispetto ai razionali), è composta di una quantità numerabile di cifre. Per questo motivo, mi sarà sempre possibile costruire un numero che abbia almeno una cifra differente da tutti gli altri (ricorda che la posizione delle cifre è discriminante nel nostro sistema di numerazione).

Tale numero sarà ancora compreso tra 0 e 1, ma non è fra quelli della lista che ho fatto, perciò i numeri reali compresi fra 0 e 1 non sono numerabili e figuriamoci se potranno esserlo tutti i numeri reali!

Il motivo per cui non è possibile "mettere in fila" i reali e contarli risiede nel fatto che ciascun numero reale (irrazionale) è una combinazione, con ripetizione, di infiniti numeri naturali su infinite posizioni (mentre i numeri razionali li posso pensare come combinazioni di infiniti valori ma su due posizioni: numeratore e denominatore). Infinite combinazioni di infiniti numeri danno un infinito di ordine superiore #**R**= $2^{\#\mathbf{N}}$

Se pensiamo di rappresentare i numeri razionali su una una retta, per quanto *densi*, questi non occupano tutti i punti della retta; i "buchi" lasciati dai numeri razionali sono riempiti dai numeri irrazionali. Ad ogni punto della retta corrisponde un numero reale (o razionale o irrazionale): i reali sono perciò CONTINUI.

Insieme delle parti di un insieme (l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme)

A{1,2,3}. Insieme delle parti di A:**P**(**A**) {Ø, {1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}}

OSS: #**A**=3 #**P**(**A**)=2^3=8

Utilizzando il sistema binario l'insieme delle parti di A risulta: **P**(A) { 000,100,010, 001,110,101,011,111}

Se ho 2 elementi (0,1) da combinare su **n** posizioni con ripetizione il numero delle combinazioni è 2^n.

Posso pensare ai numeri reali come a stringhe di 0 e 1 combinate su #**N** posizioni. Le combinazioni possibili sono $2^{\#\mathbf{N}}$ cvd.

---

[1] Attenzione a non confondere questo concetto con il concetto di ordinare. E' in effetti impossibile quale sia il successivo di un numero razionale (figurarsi di un numero reale), a causa della densità dei razionali (continuità dei reali). Il procedimento che inventa Cantor per dimostrare che i razionali sono numerabili prevede di "metterli" in fila, appunto e non di "ordinarli".