APPROFONDIMENTO sull'insieme dei NUMERI RAZIONALI

Q è il simbolo dell'insieme dei **numeri razionali**. Quest'insieme è composto da numeri del tipo $\frac{m}{n}$ con m e n interi ed $n \neq 0$, cioè le **frazioni** positive e negative.

In **forma decimale** le frazioni danno origine ai numeri decimali finiti (i fattori primi del denominatore sono solo 2 o 5) o periodici (fra i fattori primi del denominatore vi sono ache numeri <u>differenti</u> da 2 o 5).

Sono perciò tutti quei numeri che vengono usati per esprimere misure in fisica.

L'ordinamento di **Q** è "denso", cioè dati due numeri razionali distinti ne esiste sempre uno compreso fra loro.

L'insieme **Q** è chiuso[1] rispetto alle quattro operazioni (vedi file "insiemi numerici").

Q include **Z**, perché tutti i numeri interi relativi possono essere espressi come una frazione con denominatore 1! ES. 4= $\frac{4}{1}$, oppure -5= $\frac{5}{-1}$.

Anche se non è immediatamente comprensibile, anzi sembra incredibile, **Q** e **N** hanno la stessa cardinalità. Questo può essere dimostrato in due modi.

- La prima dimostrazione si basa sull'equivalenza fra il concetto di **numerabilità** e la possibilità di "**mettere in fila**[2] **e contare**". Il *procedimento diagonale* di **Cantor** infatti offre una modalità per mettere in fila le frazioni e contarle, appunto.

- La seconda dimostrazione si basa sulla definizione già data di insiemi aventi la stessa cardinalità. Si possono infatti mettere in corrispondenza le coppie di numeri che costituiscono le frazioni (numeratore ***n*** e denominatore ***d***) con i **numeri naturali** mediante, per esempio, la legge: $f(n,d) = \frac{1}{2}\left[(n+d)^2 + 3n + d\right]$ che, potete vedere rappresentata inserendola nella finestra di questo sito: http://www.wolframalpha.com/. Oppure potete verificare utilizzando Excel che, fissando ***n*** e facendo crescere ***d***, per esempio, ci dà elementi sempre crescenti e distinti.

Fra parentesi quadre è racchiuso un numero pari, qualunque siano i valori di ***n*** e ***d***. Infatti, Svolgendo il quadrato ed effettuando un raccoglimento parziale si ha:

$$\left[n^2 + 2nd + d^2 + 3n + d\right] = \left[n(n+3) + d(d+1) + 2nd\right].$$

2nd è pari qualunque siano I valori di *n* e *d*.

- Se *n* e *d* sono pari *n(n+3)* e *d(d+1)* saranno entrambi pari
- Se *n* e *d* sono dispari, *(n+3)* *(d+1)* sono pari perciò anche *n(n+3)* e *d(d+1)*

Gli altri due casi (*n* pari e *d* dispari e *n* dispari e *d* pari) sono conseguenze di questi esaminati.

Possiamo quindi affermare che #**N** = #**Q** sia perché esiste un modo per *mettere in fila le frazioni e contarle* sia perché è possibile mettere in corrispondenza biunivoca le frazioni con i numeri naturali.

---

[1] Un insieme si dice c**hiuso rispetto a un'operazione**" quando eseguendo l'operazione in questione su qualunque coppia di elementi dell'insieme, il risultato sarà ancora un elemento dell'insieme. Per esempio Q è chiuso per la sottrazione perché sottraendo a un qualunque elemento di Q un altro elemento di Q, il risultato, qualunque esso sia, sarà ancora un elemento di Q

[2] Attenzione a non confondere questo concetto con il concetto di **ordinare**. E' in effetti impossibile stabilire quale sia il successivo di un numero razionale, a causa della densità dei razionali. Il procedimento che inventa Cantor per dimostrare che I razionali sono numerabili prevede di "metterli" in fila, appunto e non di "ordinarli".