Caratteristiche degli insiemi numerici standard *da Walter Maraschini*

DEF Il *numero degli elementi di un insieme* è detto **cardinalità** dell'**insieme** ed è indicato con il simbolo #.
ES Se **D** è l'insieme dei punteggi sulle facce di un dado, allora #**D**=6.

DEF Due **insiemi** hanno la **stessa cardinalità** se e solo se possono essere messi in *corrispondenza biunivoca* (per la definizione di *corrispondenza biunivoca* vedi **Appendice**).

Il concetto è più complesso per gli **insiemi infiniti**. I due seguenti insiemi infiniti hanno infatti la stessa cardinalità, ma sono uno *sottinsieme proprio* (vedi **Appendice**) dell'altro!

N:	0	1	2	3	4	…	n	…
	↨	↨	↨	↨	↨		↨	
pari:	0	2	4	6	8	…	2n	...

Questo è noto come ***paradosso di Galilei***: i numeri pari sono solo *una parte* di tutti i numeri naturali (esistono numeri naturali che non sono pari), ma sono *tanti quanti* essi.

Il ***paradosso di Galilei*** , nella seconda metà del 1800 con **Dedekind**, assurge a definizione:

DEF Un insieme è **infinito** quando *può* essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua *parte propria*.

DEF Si dice che un insieme è **numerabile** se ha la cardinalità di **N (**può essere messo in corrispondenza biunivoca con **N)**.

N – Insieme dei numeri naturali (0, 1, 2, 3, …): i numeri per *contare*

Per definizione è ***numerabile***. Ha un primo elemento (0). Il suo ordinamento è **discreto** (ogni elemento ha il *successivo*[1]).

Proprietà algebriche

Si possono *sempre effettuare*[2] l'addizione (elemento neutro: 0) e la moltiplicazione (elemento neutro: 1).

Z – Insieme dei numeri interi relativi (0 +1, –1, +2, –2, …)[3]: i numeri per esprimere quantità *negative o positive*

E' ***numerabile***: riordinandolo nel modo seguente, si può mettere in corrispondenza biunivoca con **N**:

Z	0	+1	-1	+2	-2	…	+n	–n	…
	↨	↨	↨	↨	↨		↨		
N	0	1	2	3	4	…	2n–1	2n	

Non ha un primo elemento. Il suo ordinamento è **discreto.**

Proprietà algebriche

Si possono sempre effettuare l'addizione, la moltiplicazione e, poiché ogni numero ha l'inverso rispetto all'addizione (**opposto**), la sottrazione (elemento neutro: lo 0).

Q – Insieme dei numeri razionali (classi di frazioni equivalenti: decimali finiti o periodici)[4]: i numeri per *misurare*

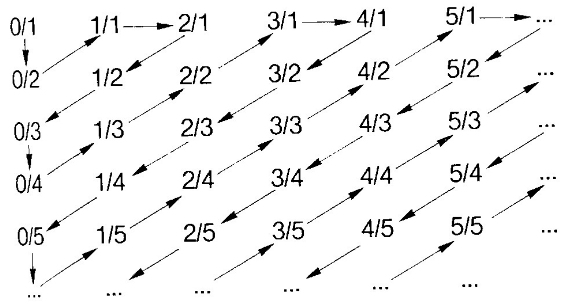
---

1 Successivo di un numero ***n***: ***n***+1.

2 **DEF** Con questa dicitura "si può sempre effettuare la *tal* operazione nel *tal* insieme" intendiamo che il risultato dell'operazione è ancora un elemento dell'insieme. Si dice, più propriamente, che l'operazione è ***interna*** all'insieme.

3 **Z**=**N**U-**N**, cioè può essere ottenuto assemblando assieme i numeri naturali e i loro **opposti** (**DEF** due numeri sono opposti quando la loro **somma** dà 0).

E' ***numerabile***. Utilizzando un'**altra definizione** di **numerabilità** (affine alla prima): <u>un insieme è numerabile quando è possibile "mettere in fila i suoi elementi e contarli"</u>, si scopre infatti che gli elementi di **Q** possono essere ordinati nel modo accennato in figura (*procedimento diagonale di Cantor).* Vi sono considerati, per semplicità, solo i numeri positivi ma il procedimento può essere facilmente esteso ai negativi.



<u>Non</u> ha un primo elemento.

Il suo ordinamento è **denso** (dati due numeri razionali distinti ne esiste sempre uno intermedio). <u>Non</u> esiste perciò il <u>successivo</u> di un razionale.

Proprietà algebriche

Si possono sempre effettuare *l'addizione*, la *moltiplicazione*, la *sottrazione* e, poiché ogni numero **diverso da zero** ha l'inverso rispetto alla moltiplicazione (**reciproco**), la *divisione* (<u>eccettuata la divisione per zero</u>). Elemento neutro della divisione è sempre 1, come per la moltiplicazione.

R: Insieme dei numeri reali (tutti i numeri[5] esprimibili in forma decimale): i numeri che esprimono la *continuità della retta*

Non è numerabile. Dimostriamo che già i numeri tra 0 e 1 non sono numerabili (sono più di tutti i naturali!). <u>Se infatti fossero numerabili</u>, essi potrebbero essere <u>tutti</u> riordinati così:

r_1: $0,a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$ r_2: $0,b_1b_2b_3b_4b_5\ldots$ r_3: $0,c_1c_2c_3c_4c_5\ldots$ (dove a_1, b_1, $c_{1,\ldots}$ sono **cifre**) ecc…

Si può però costruire un numero che abbia la prima cifra diversa da a_1, la seconda diversa da b_2, la terza diversa da c_3 e così via all'infinito … Tale numero è compreso tra 0 e 1, ma non compare nella precedente lista. **R** ha quindi una infinità **diversa e superiore** rispetto a quella di **N**. Si dice che ha la **cardinalità del continuo.**

Non ha un primo elemento. Il suo ordinamento è, oltre che denso, **continuo** e si può mettere in **corrispondenza biunivoca** con i punti della retta.

Proprietà algebriche

Si possono sempre effettuare *l'addizione*, la *moltiplicazione*, la *sottrazione* e la *divisione* (eccettuata la divisione per zero). Dei numeri reali <u>non</u> negativi si può *estrarre la radice con indice pari*. Le radici con indice dispari si possono estrarre di qualunque numero.

NB In tutti i precedenti insiemi numerici valgono poi le seguenti proprietà: ogni moltiplicazione per 0 dà 0 e: $a \cdot b=0 \Leftrightarrow a=0$ *o* $b=0$ (**legge di annullamento del prodotto**).

Nota aggiuntiva sulla cardinalità di R ($\#R = 2^{\#N}$)

Dato un insieme **A** tale che **#A**=3 questo ha 8 sottinsiemi (compreso l'insieme vuoto e **A** stesso). Osserviamo che 8 = 2^3. Come mai questo risultato? E quel **2** da dove salta fuori?

Per formare ciascuno dei sottinsiemi di **A** si potrebbe seguire un'etichettatura "binaria": formando delle stringhe da tre "posti" (tanti quanti gli elementi di **A**) in cui il numero 1 indica quale degli elementi dell'insieme "prendiamo" per formare il sottinsieme e la cifra 0 sta a "segnare" quali elementi dell'insieme non prendiamo. Si hanno così 8 stringhe:

000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111

---

[4] In linguaggio simbolico: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} | a,b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$

[5] **OSS** Ogni insieme numerico comprende il precedente: i numeri *reali* che <u>non</u> sono *razionali* sono detti *irrazionali*: tra essi i più famosi sono √2 (diagonale di un quadrato unitario) e π (rapporto tra circonferenza e diametro di ogni cerchio)

Il ***numero dei sottinsiemi*** che si possono ricavare da un insieme **A** (cioè la cadinalità dell'***insieme della parti***[6] di **A**, in simboli **P**(**A**)) corrisponde pertanto al numero delle *combinazioni* possibili di **2** elementi (0 e 1) su tanti ***posti*** quanti sono gli elementi di **A**.

$$\#\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 2^{\#\mathbf{A}}.$$

Per concludere basta convincersi che <u>ciascun **numero reale**</u> può pensarsi come la combinazione, su una quantità *numerabile* di posti, di numeri naturali[7], cioè, dal punto di vista delle cifre di cui è composto, come <u>un sottinsieme di **N**</u>. Si avrà pertanto: $\mathbf{R} = \boldsymbol{P}(\mathbf{N})$ e perciò $\#\mathbf{R} = 2^{\#\mathbf{N}}$.

Appendice (fonte: wikipedia)

Le definizioni di sottoinsieme e di sottoinsieme proprio

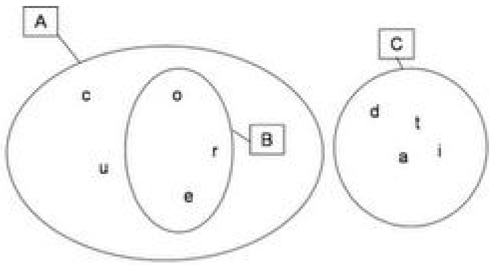
DEF L'insieme ***B*** è un **sottoinsieme** dell'insieme ***A*** se tutti gli elementi di ***B*** sono anche in ***A***:

$$B \subset A \Leftrightarrow (b \in B \Rightarrow b \in A)$$

Il simbolo usato per indicare un sottoinsieme è $\subseteq$ **(**simbolo di **inclusione**).

DEF Si parla invece di **sottoinsieme proprio** se almeno un elemento di *A* non è compreso nell'insieme *B*. (in questo caso il simbolo è: $\subsetneq$)

(fonte:www.matemedie.blogspot.com)



$B \subset A$. L'insieme B è incluso cioè è contenuto nell'insieme A, perché tutti i suoi elementi sono anche elementi di A.

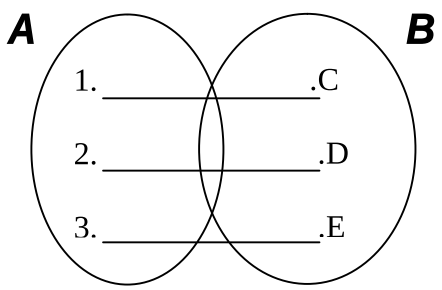
$C \not\subset A \not\subset B$. L'insieme C non è incluso né nell'insieme A né nell'insieme B.

DEF In matematica , una **<u>corrispondenza biunivoca</u>** tra due insiemi ***A*** e ***B*** è una [relazione binaria] tra ***A*** e ***B***, tale che ad ogni elemento di ***A*** corrisponda ***uno ed un solo*** elemento di ***B***, e viceversa ad ogni elemento di **B** corrisponda uno ed un solo elemento di *A*.

ES1. I residenti in Italia -> I codici fiscali

Contro es. I nati in Italia -> Le madri dei nati in Italia (queste ultime infatti possono avere più figli).

ES2.



Come è possibile vedere dal grafico, due **insiemi** (**A** e **B**) hanno la stessa cardinalità e questo fatto avviene **se e solo se** possono essere messi in corrispondenza biunivoca.

[6] **DEF** L'insieme dei sottinsiemi di un insieme **A** si chiama **insieme delle parti** di **A** e si indica con ***P***(**A**)

[7] Abbiamo accennato a lezione che si tratta di una <u>combinazione</u> (aggiungo ora: con possibilità di <u>ripetizione</u>) su una <u>quantità numerabile di posizioni</u>, di una <u>quantità numerabile di elementi</u>.