

Tratto da: Rappresentazioni dell'infinito (facoltativo)

Marta Menghini – Alessandra Angelucci

Università di Roma "La Sapienza" – Dipartimento di Matematica

Sommario. Il fatto di avere degli strumenti, e soprattutto un linguaggio, che permettono di parlare dell'infinito in modo non vago è una caratteristica peculiare della matematica.

Tale possibilità non è offerta soltanto dal settore dell'**analisi matematica** (dei rudimenti della quale ci occuperemo quest'anno), le cui procedure si basano proprio sui concetti di infinito e infinitesimo, ma anche dalla **geometria** che ci offre la possibilità, mediante il supporto delle **immagini**, di affrontare in maniera diversa questo concetto, o meglio le differenti accezioni dello stesso.

In quest'articolo ci proponiamo di mostrare, mediante alcuni esempi tratti dalla geometria, quali la **prospettiva**, la **spirale logaritmica**, l'**inversione circolare**, il **modello di Poincaré per la geometria iperbolica**, la pluralità di significato della parola infinito.

Introduzione. L'infinito non è un unico concetto ma una rete di concetti e l'utilizzo di una sola parola, al singolare, rischia di occultare questa pluralità di significati. A tale rischio si è cercato di porre rimedio servendosi di aggettivi. Due i principali: **potenziale** e **attuale**. Cerchiamo di chiarire cosa significhino tali aggettivi.

L'infinito potenziale e l'infinito attuale (Domingo Paola)

L'**infinito potenziale** caratterizza grandezze come il tempo, lo spazio e i numeri che, pur essendo in ogni loro manifestazione finite, possono essere *accresciute* o *suddivise* a piacere.

L'infinito potenziale è da intendersi come *processo* che può andare avanti quanto si vuole, senza esaurirsi, senza mai completarsi e, in tal senso, è un concetto essenzialmente negativo: è ciò che non è finito.

Secondo tale accezione, *infinito* non è ciò al di là del quale non c'è nulla, ma ciò al di là del quale c'è sempre qualcosa.

Per esempio, considera la successione dei numeri naturali: 1, 2, 3, 4, ... i puntini di sospensione indicano che puoi andare avanti quanto vuoi: infatti dopo aver raggiunto un numero n qualunque, puoi proseguire dicendo semplicemente $n+1$. A ogni passo ottieni sempre un numero finito e ben preciso, ma puoi proseguire quanto vuoi, perché dopo i numeri che hai già elencato ce ne sono tanti altri. Quanti? Quanti ne vuoi, in linea di principio: *infiniti*.

Si può pensare a un infinito potenziale per accrescimento (aggiunta di parti nuove alle grandezze considerate) e per divisione (suddivisione di una grandezza data in parti sempre più piccole): da una parte si tende verso *l'infinitamente grande* e pertanto **illimitato**; dall'altra si tende verso *l'infinitamente piccolo*, ossia si considerano grandezze sempre finite, ma piccole quanto si vuole, anche se sempre maggiori della grandezza nulla.

L'**infinito attuale** è invece qualcosa al di là del quale non c'è nulla: non è un processo, ma una qualità, una proprietà che può essere o meno posseduta.

Dal punto di vista della matematica moderna i punti di un segmento sono infiniti e costituiscono un infinito attuale e non potenziale, in quanto sono già dati, in un tutto unico, e non si costruiscono per accrescimento come avviene per la successione dei numeri naturali, né si ottengono per divisioni successive.

Aristotele nega la possibilità di un infinito in atto: ne nega sia l'esistenza, sia la possibilità di concepirlo. Quando si parla dell'*horror infiniti* della filosofia aristotelica, ci si riferisce proprio al concetto di infinito attuale che, appunto, Aristotele riteneva inconsistente.

Nel 2000 due matematici, Lakoff e Núñez, hanno proposto un tentativo di riconciliazione: la loro *Metafora dell'Infinito* (**BMI**: Basic Metaphor of Infinity) propone infatti di concettualizzare l'infinito attuale come il risultato finale di un processo iterativo che però si può solo illustrare per passi.

Gli esempi che seguono vogliono illustrare la pluralità di significati della parola infinito, anche alla luce di tale metafora.

Per le **immagini** si rimanda alla presentazione in Power Point. I numeri delle figure si riferiscono ai numeri delle slides della presentazione.

La prospettiva

Una delle più semplici visioni d'infinito che abbiamo la trovate nelle **figure 1 e 2**.

Questa fotografia dà l'idea di quel che accade quando si costruisce, in prospettiva, l'*immagine* di un punto all'infinito: il punto comune ad un fascio di rette parallele.

Immagine, in senso matematico: come corrispondente di un punto in una funzione (cfr file "funzioni").

Quello offerto dalla **prospettiva** è uno dei metodi più semplici, e anche più antichi, per rappresentare l'infinito. Lo studio teorico della prospettiva nasce, infatti, nel XV secolo, ad opera di **Leon Battista Alberti**, **Piero della Francesca**, **Albrecht Dürer** Le **Figure 3 e 4** ritraggono Dürer stesso (1471 – 1528) alle prese con la costruzione materiale della figura in prospettiva punto per punto.

Vediamo un uso consapevole della prospettiva in **Paolo Uccello** (1436-1477): "*Il miracolo dell'ostia profanata*" (**figura 5**) ma già molto tempo prima erano note tecniche prospettiche, almeno relative alla prospettiva centrale. Uno degli esempi più antichi: "*Stanza delle Maschere*" (**figura 6**).

Interessantissimo l'uso che si fece della prospettiva nel **teatro barocco** (**figura 8**) per la creazione di scenografie volte a suscitare stupore e meraviglia, oltre che per la realizzazione della struttura architettonica dei teatri stessi. In quest'epoca si colloca anche il gioiellino architettonico della **Galleria Borromini**, ospitato da Palazzo Spada a Roma (**figura 7**).

L'illustrazione tecnica del procedimento della prospettiva esula dalle nostre possibilità e dai nostri scopi. Qualunque approfondimento in tal senso è benvenuto.

Soffermiamoci sul fatto che alla base della prospettiva stanno le due azioni del **proiettare** e del **segare**: la prima operazione trova riscontro nel processo della visione, per cui si conducono dal centro di *un* occhio (centro di proiezione **O**) tutti i raggi visivi che vanno ai punti della figura. La seconda operazione corrisponde alla formazione dell'immagine della figura stessa sopra il quadro (in grigio in figura 9).

Quando la figura da rappresentare è una **conica** le sezioni rappresentate saranno a loro volta *coniche*, con la possibilità, a seconda della posizione reciproca di figura da rappresentare, quadro e osservatore, di *vedere* il processo che conduce da un tipo di conica all'altra a seconda della diversa collocazione dei *punti all'infinito* della conica da rappresentare e della resa prospettica di questa.

Applichiamo questo procedimento a un'ellisse posta sul "pavimento": il **piano orizzontale**. Le figure rappresentate sono rispettivamente: ancora un'ellisse (zero punti all'infinito) quando l'ellisse è *oltre* il quadro, **fig. 9a**, una parabola (un punto all'infinito), quando l'ellisse *taglia* il quadro ed è tangente al piano dell'osservatore (piano perpendicolare al pavimento e passante per **O**) **fig. 9b**; un'iperbole (due punti all'infinito), quando l'ellisse taglia sia il quadro che il piano dell'osservatore (la porzione posteriore all'osservatore "ricompare" sul quadro come secondo ramo dell'iperbole): **fig. 9c**

Pur essendo stata costruita dagli artisti-matematici in funzione di una rappresentazione pittorica più corrispondente alla realtà, lo spazio cui la prospettiva rimanda non è lo spazio umano: terrestre, ma lo spazio astratto euclideo: lo spazio matematico classico¹.

Un'osservazione didattica: nelle "rotaie" (figg. 1-2) l'immagine *colpisce*: vedo quel punto *infinitamente* lontano. Ma già nei quadri la tecnica pittorica prende il sopravvento e non ci si fa più caso all'infinito (anche perché i quadri in genere rappresentano luoghi terrestri e, quindi, a distanza finita) a meno che il pittore non cerchi di renderlo esplicito o di evocarlo (cfr ROMANTICISMO o alcune stampe di epoca moderna del grafico Escher).

Lo stesso per le coniche: se osservo le tre figure separatamente ho delle immagini statiche che non evocano nulla. Se invece ho la possibilità di vedere il passaggio graduale da una conica all'altra, ecco che l'infinito ricompare: o almeno ricompare la sua *ombra*.

Come spesso in didattica, omettendo il processo che porta da un'immagine ad un'altra si perde anche il concetto.

Passiamo ora ad un'altra visione dell'infinito.

La spirale logaritmica (figura 10)

In una lettera diretta a P. Mersenne, il 12 settembre 1638, **Descartes** (1596 – 1650) propone di caratterizzare la **spirale logaritmica** mediante una delle sue proprietà meno evidenti: se ρ è il raggio uscente da un punto **A** (polo della spirale) c'è la stessa proporzione tra la lunghezza curva ANB e la lunghezza del segmento AB, e tra la lunghezza della curva ANBC e la lunghezza del segmento AC (**figura 10**); ovvero, sinteticamente - posta s la

lunghezza di una porzione di curva e ρ la lunghezza del raggio corrispondente: $\frac{s}{\rho} = k$

Con $k (\neq 1)$ costante che individua quel che **Torricelli** (1607-1647) chiamerà la *specie* della spirale e che la caratterizza completamente.

C'è da fare una precisazione non banale: il punto **A**, seppur chiaramente *visibile* nel disegno, è un punto "inaccessibile" della spirale, passando infatti attraverso una matematica di livello universitario, l'equazione diventa: $\rho = a^{\omega}$. E: $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} a^{\omega} = 0$.

Dunque il polo **A** risulta essere un *punto asintotico* della spirale.

Questa *curva mirabilis* (chiamata così dal matematico **Jakob Bernoulli**. Vedi pagina seguente) ci permette di incontrare l'infinito due volte: e in due modi non equivalenti, visto che l'*infinitamente piccolo* è differente dall'*infinitamente grande*; e, ancora, differenti dalle modalità della prospettiva: qui c'è la rappresentazione di un *percorso infinito* e, nel caso del polo, percorso che si avvicina ad un punto "visibile" senza mai raggiungerlo.

Il risultato finale di un processo iterativo che però si può solo illustrare per passi, quindi, stando alla BMI il polo di una spirale è un infinito attuale che, paradossalmente, sta lì sotto i nostri occhi senza che possiamo mai vederlo realmente!

Nel caso della prospettiva invece l'infinito non viene raggiunto mediante un processo ma "fotografato": costretto, per costruzione, al finito!

Jakob Bernoulli (1654-1705) trovò molte proprietà della spirale logaritmica, e la considerava a tal punto *mirabilis* che volle fosse scolpita sulla sua tomba con la seguente didascalia: "*Eadem mutata resurgo*" [Sebbene cambiata, rinasco identica] Questa frase si riferisce ad una delle sue scoperte: se si opera su una spirale logaritmica con uno ZOOM (cioè si effettua una similitudine) si ottiene una spirale **uguale** a quella di partenza [stessa forma e stessa lunghezza!]. Ritroviamo in questa proprietà della spirale logaritmica la definizione di insieme infinito di **Dedekind**: la biattività con un sottoinsieme proprio.

¹ Inoltre la nostra visione è *bifocale* mentre la prospettiva ha "un occhio solo". Tutto ciò comporta, dal punto di vista artistico, che spesso la messa in prospettiva di un'immagine non sia poi effettivamente realistica, cioè corrispondente alla nostra visione dell'immagine in questione.

Ancora una nuova immagine, questa volta non in senso matematico (cfr pag. 2 primi capoversi della sezione dedicata alla prospettiva) di infinito, come di un processo continuo: senza fine, in cui, pur muovendomi, resto ferma: non arrivo a nessun approdo: resto nello stesso punto.

Un altro argomento:

L'inversione circolare²

Figura 11. Sia dato un cerchio **C** di centro **O** e raggio $r=1$ (per semplificarci un po' i conti, ma si può fare utilizzando circonferenze di raggio qualunque!). Ad ogni punto **P** del piano associamo un punto **P'** della semiretta **OP** tale che $OP \cdot OP' = r^2 = 1$.

La trasformazione che porta i punti **P** nei punti **P'** si dice inversione circolare, il cerchio **C** si dice *cerchio d'inversione*, il punto **O**, *centro d'inversione*. L'inversione è definita su tutto il piano escluso il punto **O**.

In coordinate polari, e ponendo $r = 1$, potremmo scrivere l'equazione dell'inversione nel modo seguente: $\rho' = \frac{1}{\rho}$.

L'inversione circolare stabilisce una **corrispondenza biunivoca** tra i punti del piano interni al cerchio, escluso il punto O, e i punti del piano esterni al cerchio.

Per poter estendere il campo di esistenza a tutto il piano bisogna dunque introdurre un *punto all'infinito* che sia **immagine di O** e, reciprocamente, ammettere che l'inversione circolare porti tale punto in **O**.

Infatti, se **P** si avvicina ad **O**, e quindi ρ a zero, **P'** va verso il punto all'infinito della retta **OP**, e, man mano che **P** va all'infinito **P'** si avvicina ad **O** (riesci a vederlo?).

Si pone un problema evidente: in un piano euclideo ogni retta passante per O individua due infiniti. Perché quanto sopra sia consistente, dovremo innanzitutto far coincidere questi due infiniti in un punto solo.

Inoltre vi sono infinite rette passanti per O, quindi, oltre che identificare "gli infiniti" di ciascuna retta" dovremo identificare gli infiniti di tutte le rette.

Di fatto il *centro d'inversione* diventa il corrispondente di tutti i punti all'infinito delle infinite rette passanti per O, cioè di tutti i punti all'infinito del piano.

Questo fatto comporta che l'inversione circolare trasformi *rette, non passanti per O*, in *circonferenze passanti per O*, infatti: il punto all'infinito della retta, apparentemente doppio nella raffigurazione euclidea, va a chiudersi nel centro d'inversione.

Per lo stesso motivo l'inversione circolare trasforma *circonferenze passanti per O* in *rette e circonferenze non passanti per O* in *circonferenze*.

Se riesci a considerare una retta come una circonferenza di raggio infinito potresti sintetizzare quanto prima nella seguente proprietà: *l'inversione circolare trasforma circonferenze in circonferenze*.

Le modalità di trasformazione delle rette da parte dell'inversione circolare sono sintetizzate nella **fig. 14** che ci mostra la trasformata per inversione di una scacchiera (della parte di scacchiera esterna alla circonferenza d'inversione).

Vediamo alcune trasformate per inversione circolari di curve classiche³.

Un'**ellisse contenente** la circonferenza d'inversione diventa una curva chiusa interna ad essa (di quarto grado): **fig.15**, coerentemente con una delle proprietà dell'inversione

² Agazzi E. - Palladino D., 1998, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Milano, Arnoldo Mondadori

³ Maor E., 1987, *To infinity and beyond*, Boston, Birkhauser,

circolare: mandare i punti esterni in punti interni e viceversa e tenere unita ("ferma") la circonferenza d'inversione.

La trasformata per inversione di una **parabola** sarà una cardioide (**fig. 16**).

Un'**iperbole equilatera tangente** alla circonferenza si trasforma nel simbolo "sintattico" dell'infinito (una *lemniscata*): i punti di tangenza restano uniti mentre i rami vanno a convergere nel centro d'inversione. **Figura 17**.

La trasformata per inversione di una **spirale logaritmica** con polo nel centro d'inversione viene illustrata in maniera più espressiva proprio dalle equazioni: abbiamo una curva di equazione: $\rho = a^\omega$ che diventa: $\frac{1}{\rho'} = a^\omega$ cioè $(\rho')^{-1} = a^\omega$ cioè: $\rho' = a^{-\omega}$ quindi una spirale logaritmica di stessa specie della precedente ma ottenuta *ruotando in senso orario*, invece che antiorario (**Figura 18**)!

Se consideriamo una **spirale con polo sull'asse delle x**, nel punto $(\frac{1}{2}; 0)$ il polo andrà in $(2; 0)$ e in **O** si creerà un secondo polo dando luogo, citando le parole di Donald Coxeter, ad uno dei modi più belli per portare l'infinito al finito. Escher ne ha tratto spunto per un disegno particolarmente suggestivo: **figura 19**.

L'inversione circolare è già interessante in sé, ai fini del nostro discorso, ma è anche propedeutica all'introduzione di un altro *ambiente matematico* che consente la rappresentazione dell'infinito al finito:

Il modello per la geometria iperbolica di Poincaré⁴

H. Poincaré, La Science et l'Hypothèse, Cap. IV: *"Immaginiamo un mondo rinchiuso in una grande sfera e sottoposto alle leggi seguenti: la temperatura non è uniforme: è massima al centro e diminuisce man mano che ce ne si allontana, per ridursi allo zero assoluto quando si raggiunge la sfera dove il mondo è racchiuso...*

Supporrò inoltre che, in un siffatto mondo, tutti i corpi abbiano lo stesso coefficiente di dilatazione, in maniera che la lunghezza di un regolo qualunque sia proporzionale alla sua temperatura assoluta; e infine un oggetto trasportato da un punto all'altro, la cui temperatura sia differente, si metta immediatamente in equilibrio termico con il nuovo ambiente...

Un oggetto mobile diverrà allora via via più piccolo man mano che si avvicinerà alla sfera limite... se questo mondo è limitato dal punto di vista della nostra geometria abituale, sembrerà però infinito ai suoi abitanti. Quando questi, in effetti, vogliono avvicinarsi alla sfera limite, si raffreddano e diventano via via più piccoli, sì che essi non possono mai raggiungere la sfera limite..."

La sfera limite di cui **Poincaré** parla nell'estratto precedente, rappresenterà pertanto, per gli abitanti dello *strano mondo* che essa racchiude, l'infinito.

Il *modello di Poincaré per la geometria iperbolica* è un cerchio di centro **O** e raggio **r**: (in qualche modo, la sezione del mondo sferico precedente) che, pur essendo limitato "dal di fuori", al suo "interno" rappresenta, grazie ad una ridefinizione del concetto di distanza, un piano infinito. La circonferenza **C** che delimita tale cerchio rappresenta in tale modello, appunto, l'infinito.

La descrizione tecnica di tale modello è un po' troppo complessa e sorvoliamo. Vi segnalo però degli applet carini che ne simulano in maniera interessante il funzionamento: <http://progettomatematica.dm.unibo.it/NonEuclidea/File/applet%20Non%20Euclid.htm>

Escher combina una tassellazione per esagoni ad una per rettangoli ottenendo uno dei suoi famosi circle: "angels and devils" (**figura 22**)

⁴ Coxeter H. S. M., 1957, Non-Euclidean Geometry, Toronto, University of Toronto Press

Conclusioni. Abbiamo sorvolato su diverse visioni d'infinito:

- l'**infinito attuale** "per definizione" della **prospettiva**;
- il doppio infinito della **spirale logaritmica**: il polo (infinitamente piccolo), effetto ottico di un infinito attuale "alla BMI" (cfr pag. 1) e l'infinitamente grande dell'avvolgersi infinito delle sue spire e dell'avvolgersi fino all'infinito delle stesse (una quantità infinita di spire che si avvolgono fino all'infinito);
- l'**inversione circolare** che consente giochi di trasformazione reciproca tra infinito e finito e fra i due differenti tipi d'infinito precedentemente individuati;
- il **modello della geometria iperbolica di Poincaré** che rende visibile in maniera emblematica il processo che, secondo la BMI, funge da liaison fra infinito potenziale (il processo del tassellare che non ha mai fine) e infinito attuale (il cerchio limite che è il lugo dove risiede l'infinito del modello: è infinito attuale!).

La geometria consente di affrontare ciascuna di queste concezioni d'infinito mediante un approccio cognitivo pre-evidente: più o meno immediato, più o meno formalizzabile.

La possibilità di "vedere" offerta da questi esempi geometrici ha i suoi vantaggi ma anche le sue "insidie": ad esempio l'occhio-cervello registra in maniera corretta, anche se non può immaginare la raffinatezza matematica che lo regola, il modello di Poincaré, ma può trovarsi spiazzato di fronte ad alcune costruzioni prospettiche che possono risultare anche molto articolate, o anche ingannato, come nel caso del polo della spirale logaritmica.

I pro e i contro dell'utilizzo delle immagini nella comprensione dei concetti, che si tratti di didattica come di divulgazione, non possono non presentarsi in quest'ambito in cui con concetti, quindi con immagini, così significative, ci si va a confrontare.

Torino – 27 novembre 2006