La risoluzione di una disequazione di secondo grado

Quest'anno le disequazioni saranno importantissime. Non si parlerà però propriamente di disequazioni ma di "studiare il segno" di una funzione. In effetti un numero può essere, dal punto di vista del **segno**, o *positivo* o *negativo* o *nullo*. Quindi risolvere una disequazione o studiare il segno di una funzione, non è molto differente! Ma ne riparleremo.

Cos'è una disequazione di secondo grado e cosa vuol dire risolverla?

Consideriamo la *disequazione letterale* (i coefficienti sono lettere): $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \geq 0$

Questa disequazione presenta il simbolo: "≥", che si legge: "maggiore o uguale". Questo tipo di simbolo diremo che indica la **RICHIESTA** della disequazione.

Una disequazione è infatti una **domanda**: per quali valori di ***x*** il *numero corrispondente* al conto espresso dall'espressione matematica considerata ha un certo **segno** o un altro?

Risolvere la disequazione di prima, per esempio, significa trovare quegli *intervalli*[1] di **numeri** che, messi al posto della ***x*,** danno come risultato, zero o un numero *positivo*.

Vedremo che possiamo affrontare lo studio di una disequazione in due modi: **algebrico** e **geometrico-algebrico** (per brevità: **geometrico**). Vediamoli in parallelo così che tu possa confrontarli e *scegliere*, alla fine, quello che capisci meglio o ti piace di più.

Risolvere una disequazione di secondo grado significa	
Algebricamente	**Geometricamente**
Trovare qual è quell'intervallo di numeri tale che, preso un *qualunque* numero dell'intervallo, *sostituito* al posto della ***x*** e fatti i **conti** (una volta che al posto di ***a***, ***b*** e ***c*** ci sono numeri, ovviamente) – compresi gli eventuali elevamenti a potenza della ***x*** stessa – si ha come risultato un numero positivo o nullo.	Considerata la **parabola** di equazione: $y=\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$, trovare gli inervalli di ***ascisse*** (*x*) di punti della parabola che hanno ***ordinata*** (*y*) corrispondente *positiva* o *nulla*.
Fai attenzione!	
Per utilizzare questo punto di vista - per risovere le disequazioni (o studiare il segno) - ti dev'essere chiaro come si **scompone** un polinomio di secondo grado	Per utilizzare questo punto di vista - per risovere le disequazioni (o studiare il segno) - ti devono essere chiare le **corrispondenze** fra punti di una curva e loro coordinate.

[1] Se pensi i numeri reali rappresentati su un asse (retta orientata e graduata), un **intervallo numerico** può essere rappresentato da un **segmento** di retta o da una **semiretta**.

L'intervallo si dice **aperto** se non si prendono i valori numerici che corrispondono agli **estremi** del segmento (o all'origine della semiretta) e si dice **chiuso** in caso contrario. Un intervallo può anche essere chiuso solo a destra o solo a sinistra.

In **simboli** un intervallo può essere rappresentato in diversi modi. Per esempio l'intervallo ***aperto*** dei numeri conpresi fra 2 e 5 si può indicare: (2;5); o:]2;5[; o: $2 < x < 5$. Se l'intervallo fosse ***chiuso*** (da entrambe le parti), sarebbe: [2;5]; oppure: $2 \leq x \leq 5$, ecc...

N.B. Per semplificare il numero di casi da considerare (e anche per semplificare i conti), stabiliamo una volta per tutte che, nel caso il coefficiente a di x^2 sia ***negativo***, cambierai **segno** a tutti i ***termini*** e cambierai il **verso**[2] della disequazione.

ES $-3\cdot x^2-5\cdot x+7>0$ diventerà: $+3\cdot x^2+5\cdot x-7<0$

Come risolvere le disequazioni di secondo grado algebricamente?

Per risolvere una disequazioni algebricamente, si sfrutta il fatto che:

1. "Il segno di un prodotto è dato dal prodotto dei segni"

Che significa? Significa che, se moltiplico dei numeri *reali*, il **segno** del risultato della moltiplicazione (*prodotto*) sarà il risultato della moltiplicazione (*prodotto*) dei **segni** dei singoli *fattori* (termini della moltiplicazione).

ES: il risultato di: $-\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\pi$, al di là del valore del modulo, avrà segno "+" che è il risultato di: [(-)·(-)·+]: la moltiplicazione dei segni dei *fattori*

2. Un polinomio si può **scomporre** *se e soltanto se* esistono valori che l'annullano, cioè *se e soltanto se* l'equazione *associata* ha **soluzioni reali**.[3]

Ciò premesso, vai a vedere se si può risolvere l'**equazione associata** alla disequazione: quella che ottieni sostituendo il simbolo "≥" con il simbolo "=": $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

Nell'applicare la **formula risolutiva** (vedi box a lato) - o anche *prima* di applicare tale formula - calcolerai il **Δ** (***delta***, o *discriminante*, e cioè quello che trovi sotto la radice: b^2-4ac).

Le **formule risolutive** sono:

Se **b** è ***dispari***:

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

E se ***b*** è ***pari***:

$$x_1,x_2=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

Attenzione: ***b/2*** è la *metà* di ***b***! Non fare cose strane...

A seconda del **segno** di **Δ** avrai tre CASI:

CASO 1. Δ>0

x_1 e x_2 sono **reali** e **distinte**, il polinomio si può scomporre nel modo seguente: $a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

Poiché il ***segno*** di ***a*** abbiamo detto che sarà sempre *positivo* (e un segno positivo NON CAMBIA il segno di un prodotto), il ***segno*** del polinomio sarà dato dal ***prodotto*** fra i ***segni*** dei due *binomi* in cui l'hai scomposto.

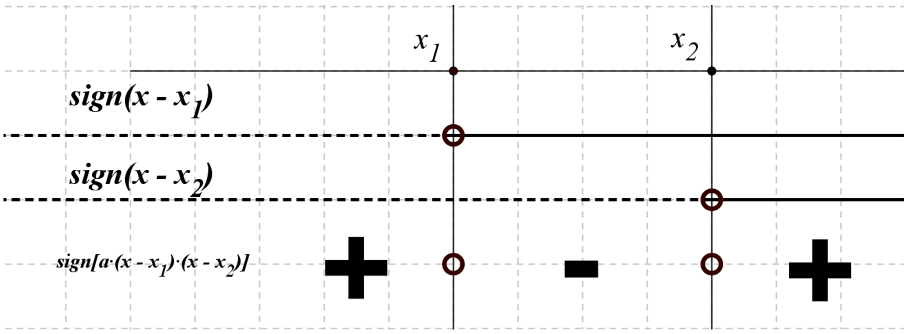
Il **prodotto** dei **segni** lo puoi rappresentare schematicamente come nella figura seguente; in cui la linea *tratteggiata* corrisponde all'intervallo di numeri che rendono ***negativo*** il fattore corrispondente, e la linea *continua* corrisponde all'intervallo di numeri che rendono ***positivo*** il fattore corrispondente (se preferisci puoi metterci una sequenza di - - - - e +++) e i "**O**", indicano valori per i quali il ***fattore*** (e quindi - per la **legge** di **annullamento** del **prodotto** – il polinomio tutto) si ***annulla***.

---

[2] E' necessario cambiare il verso della disequazione a causa dal diverso modo che si ha per confrontare (stabilire chi è più piccolo e chi è più grande) i numeri positivi e i numeri negativi. Se infatti: 5 > 3, sarà allora: -5 < -3.

Perciò, quando cambi i **segni** a tutti i *coefficienti* di una disequazione di secondo grado, devi cambiare anche il **verso** della disequazione

[3] Questo, di fatto, è l'enunciato del **Teorema di Ruffini** (corollario del **Teorema del Resto**, che trovi anche su Wikipedia) e, come tutti gli enunciati di un teorema, può essere **dimostrato**.



Se la ***richiesta*** della disequazione, come sopra, riguarda valori positivi o nulli, la soluzione della disequazione sarà: (-∞ ; $\boldsymbol{x}_1$] v [$\boldsymbol{x}_2$; + ∞) oppure $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}_1$ o $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{x}_2$. A parole: "la disequazione è verificata per il *valori esterni* alle *radici*, comprese le *radici* stesse".

CASO 2. Δ=0

$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2}$, cioè sono **reali e coincidenti**, il polinomio si può scomporre nel modo seguente: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1)^2$ perciò il **segno** del polinomio è positivo per ogni valore di $\boldsymbol{x}$ diverso da $\boldsymbol{x}_1$ e nullo per $\boldsymbol{x}$ uguale a $\boldsymbol{x}_1$ (il **quadrato** di *qualsiasi cosa* è sempre ***positivo***, se la ***base*** NON è zero e ***nullo*** se la ***base*** è zero).

Se la disequazione è del tipo: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \geq 0$, la soluzione sarà *tutto l'insieme dei numeri reali*. Potrai scrivere la **soluzione** in uno dei seguenti modi: $\forall x \mid x \in \mathbb{R}$; (-∞;+ ∞); "sempre verificata".

Se la disequazione è del tipo: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} > 0$, la soluzione sarà *tutto l'insieme dei numeri reali escluso* $\boldsymbol{x_1}$. Potrai scrivere la **soluzione** in uno dei seguenti modi: $\forall x \mid x \in \mathbb{R} \setminus x_1$; $\forall x \mid x \in \mathbb{R}; x \neq x_1$ (-∞;$\boldsymbol{x_1}$) v($\boldsymbol{x_1}$;∞).

Se la disequazione è del tipo: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \leq 0$, la soluzione sarà solo $\boldsymbol{x_1}$.

Se la disequazione è del tipo: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} < 0$, non avrà soluzione. Potrai scrivere questo fatto in uno dei seguenti modi: $\neg \exists x$ (o il simbolo di *esistenza* sbarrato) ∅; "impossibile".

CASO 3. Δ<0

$\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ **NON** sono numeri **reali** perché la radice di un numero negativo non è un numero reale e perciò il polinomio non si può scomporre nell'insieme dei **reali**.

Il **segno** del polinomio sarà dato dal segno di ***a***. Poiché abbiamo reso ***a*** positivo, il segno del polinomio sarà ***positivo*** per ogni valore di **x**. Ti lascio scrivere le soluzioni nei vari casi che si possono presentare.

Come si risolve graficamente una disequazione di secondo grado?

Per utilizzare il ***metodo grafico di risoluzione delle disequazioni****, non è necessario disegnare la parabola in maniera esatta: ti* *basta determinare eventuali punti d'intersezione con l'asse delle x e la concavità**. Ma un bel ripasso sulla parabola FALLO!*

I grafici mediante i quali si possono rappresentare le soluzioni ottenute mediante metodo algebrico sono in realtà una *stilizzazione* di una porzione di piano cartesiano.

Vediamo come appare il **grafico intero**.

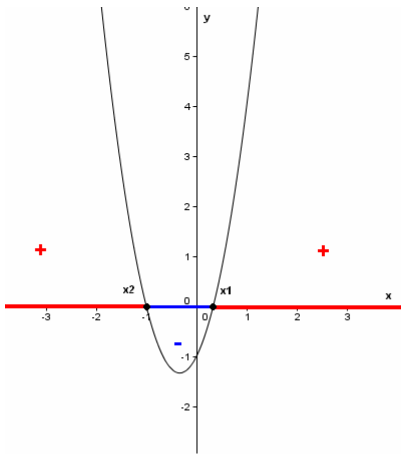
ES1*: consideriamo la disequazione* $3x^2 + 2x - 1 > 0$

La parabola associata avrà equazione: $y = 3x^2 + 2x - 1$

Possiamo dare un **significato geometrico** alla risoluzione della **disequazione**. Risolvere questa disequazione infatti significa, geometricamente, trovare gli intervalli di *ascisse* (***x***) dei **punti della parabola** le cui *corrispondenti ordinate* (***y***) sono ***positive***.

Per il *cosiddetto* "Principio fondamentale della geometria analitica": *tutti e soli i punti della parabola sono quelli le cui coordinate veirficano l'equazione della parabola stessa.*

La funzione $y = 3x^2 + 2x - 1$ rappresenta matematicamente il legame ora richiamato fra ascisse e ordinate di *tutti e soli* i punti della parabola.



Andiamo a disegnarla e vediamo come risolvere la disequazione servendoci del disegno.

Innanzitutto osserviamo che la curva della funzione interseca l'*adx* in due punti distinti (l'equazione associata $3x^2+2x - 1=0$ infatti, ha $\Delta>0$).

- Troviamo le ascisse dei punti d'intersezione con l'*asse delle x*: $\boldsymbol{x_1}=-1$ e $\boldsymbol{x_2}=1/3$

- Disegniamo la parabola sul piano cartesiano (volendo anche senza trovare le coordinate del vertice **V**). Infatti $\boldsymbol{a}>0$ (e abbiamo detto che sarà sempre così) perciò la parabola ha **concavità rivolta verso l'alto**.

Dal disegno "si vede" come i ***punti*** che hanno ***ordinata positiva*** (cioè *al di sopra dell'adx*) sono quelli che hanno ascisse "esterne" ai valori a $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$. L'intervallo colorato di rosso.

Confrontiamo questo risultato con quello che avremmo avuto algebricamente (fai i conti da te) e ovviamente i due percorsi danno la stessa soluzione!

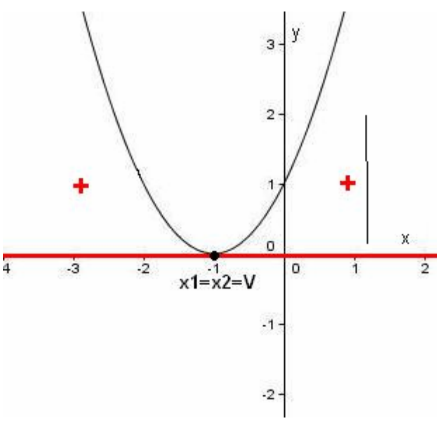
Vediamo cosa accade graficamente quando $\Delta = 0$ oppure $\Delta < 0$

ES2*: consideriamo la disequazione* $x^2 + 2x + 1 > 0$

- Prendiamo la parabola associata $y = x^2 + 2x + 1$

- Troviamo i valori $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ e osserviamo che sono coincidenti ($\Delta = 0$)

- Disegniamo ora la parabola sul piano cartesiano.



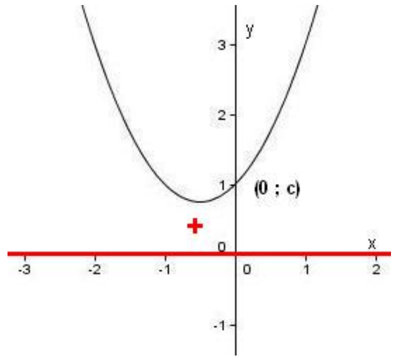
La disequazione ci "chiede": quali sono le ascisse dei punti aventi ordinate positive?

Dal disegno "si vede" che i punti della parabola hanno ordinate positive (e non nulle) in corrispondenza di qualunque valore di $\boldsymbol{x}$ escluso $\boldsymbol{x_1}=-1$

Andando a confrontare questo risultato con quello che otterremmo algebricamente ovviamente, di nuovo, abbiamo la stessa soluzione .

ES3*: consideriamo la disequazione* $x^2 + x + 1 > 0$

- Prendiamo la parabola associata $y = x^2 + x + 1$



- Cerchiamo i valori x_1 e x_2 e osserviamo che non esistono nei reali ($\boldsymbol{\Delta} < 0$)

- Disegniamo ora la parabola sul piano cartesiano.

NB: In questo caso la disequazione è sempre verificata (per ogni valore che assegniamo a "*x*" la "*y*" è positiva).

Conclusioni

Alla fine potete osservare come, mettendosi in condizione che il coefficiente di $\boldsymbol{x^2}$ sia sempre ***positivo***, i casi che si possono presentare sono sempre gli stessi!

Costruite perciò uno **schema** dei casi possibili e imparatelo <u>a memoria</u> (dopo aver capito com'è il ragionamento!). Opure ripetete il ragionamento finché vi serve.

Qualunque cosa, ma non sbagliate più, per favore!!!

Osservazioni sulle equazioni di secondo grado

Oltre alla forma: $\boldsymbol{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}=0$, di cui abbiamo già parlato, ci sono due casi particolari che si possono risolvere in maniera più rapida rispetto all'applicazione dell'equazione associata; e che, oltretutto, presentano anche delle regolarità "comode".

$\boldsymbol{a \cdot x^2 + b \cdot x} = 0$. <u>Ha sempre soluzioni distinte, una delle quali è 0</u>.

Si può infatti risolvere scomponendo il polinomio: $x \cdot (ax + b) = 0$ $\quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{array}$

$\boldsymbol{a \cdot x^2 + c} = 0$ Si risolve o meno a seconda se i coefficienti sono discordi (segno differente) o concordi (stesso segno). Si ha infatti:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \qquad \begin{array}{l} c \cdot a < 0 \Rightarrow -\dfrac{c}{a} > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}} \\ c \cdot a > 0 \Rightarrow -\dfrac{c}{a} < 0 \qquad \neg\exists \mathit{soluzioni} \end{array}$$