Dimostrazione dell'indipendenza del periodo di un pendolo, per piccole oscillazioni, dalla massa e dall'ampiezza

Innanzitutto bisogna mostrare che il pendolo, per *piccole oscillazioni*, è un **oscillatore armonico**.

Osserviamo che la **forza** responsabile dell'oscillazione è la componente della forza peso (P) parallela allo spostamento[1] (x): $P_{//}$.

$\mathbf{F} = \mathbf{P}_{//} = -\mathbf{P}\cdot\text{sen}\alpha = -m\cdot\boldsymbol{g}\ \text{sen}\alpha$.

Il "–" è dovuto al fatto che la forza agisce in verso opposto rispetto allo spostamento: è quel che si dice una forza di richiamo.

Per α "piccolo" senα ≈ α e perciò:

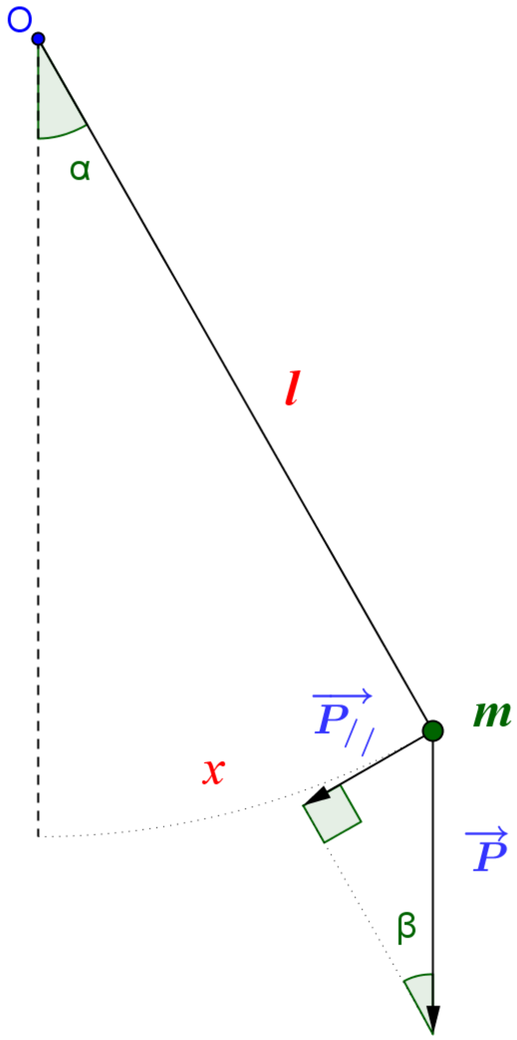
$\mathbf{F} = -m\cdot\boldsymbol{g}\cdot\alpha$

Ricordando che, espresso in *radianti*,

$\alpha = x/l$, si ha dunque:

$\mathbf{F} = -m\cdot\boldsymbol{g}\cdot x/l$.

Cioè: $\mathbf{F} = -\frac{m\cdot g}{l}\cdot x$



Fissati m ed l, perciò (e il pianeta su cui si svolge l'esperimento), la forza **F** risulta *direttamente proporzionale* all'opposto dello spostamento x, com'è ogni forza responsabile di **oscillazioni armoniche**.

La quantità $\frac{m\cdot g}{l}$ rappresenta quella che abbiamo chiamato "costante di elasticità" per un oscillatore. Poniamo dunque: $\frac{m\cdot g}{l} = k$.

Ricordando, a questo punto, che la relazione tra il periodo e le grandezze caratteristiche di un **oscillatore armonico** è: $T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}$ avremo il periodo di un pendolo, per piccole oscillazioni:

$$T = 2\pi\cdot\sqrt{\cancel{m}\cdot\frac{l}{\cancel{m}\cdot g}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Questa relazione afferma che **T** non dipende né dall'ampiezza (α), né dalla massa.

[1] La componente della forza peso **ortogonale** allo spostamento, invece, è *neutralizzata* dalla tensione del filo.