IL MOTO PARABOLICO

Il moto parabolico è un moto derivante dalla composizione di due moti: un moto uniforme parallelo a uno degli assi (*asse x*) del SdR e un moto uniformemente accelerato parallelo all'altro asse (*asse y*) del SdR. La **traiettoria** del moto parabolico è una **parabola**.

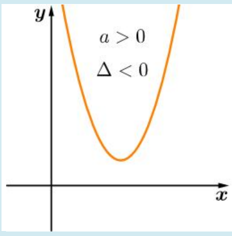
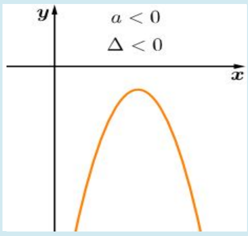
Parabola con asse di simmetria verticale (parallelo all'asse y delle ordinate)

Si può definire la parabola come *luogo geometrico* o come *sezione conica*. Per quel che ci serve in fisica (diagramma t-s di un moto uniformemente accelerato, o traiettoria di un moto parabolico), **definiamo** la parabola come grafico della funzione di equazione[1]: $y=ax^2+bx+c$. In particolare questa è l'equazione di una parabola con asse (di simmetria) parallelo all'*asse y*.

La parabola è dunque una curva simmetrica rispetto a un asse. Il punto d'intersezione tra parabola e asse della parabola è detto **vertice**. Coordinate del vertice **V**=($-\frac{b}{2a}$; $-\frac{\Delta}{4a}$).

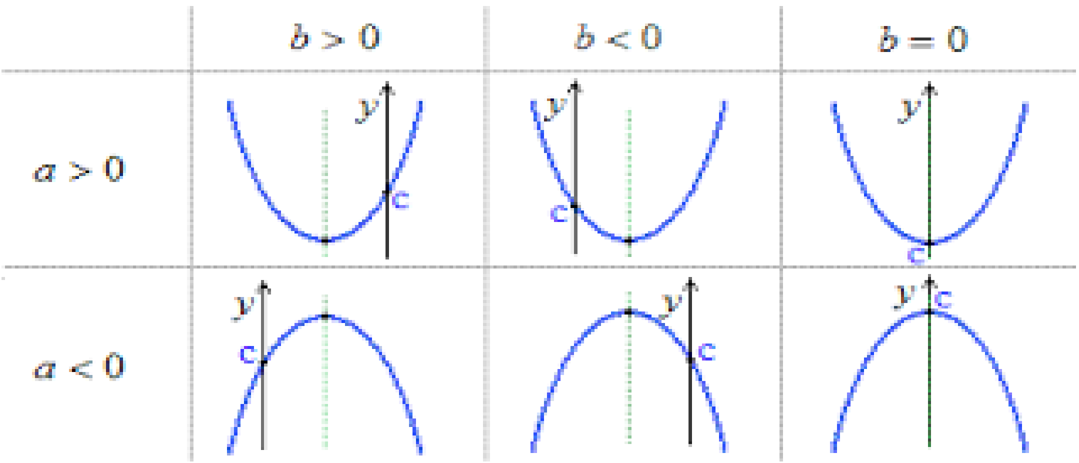
Altri punti importanti da trovare (se ci sono), sono le intersezioni della parabola con l'*asse x*. Le ascisse di tali punti sono date dalle soluzioni dell'equazione: $ax^2+bx+c=0$.

Se $\Delta>0$ le intersezioni sono due <u>distinte</u>. Se $\Delta=0$ le intersezioni sono due <u>coincidenti</u> (quindi la parabola è **tangente** all'*asse x*). Se $\Delta<0$ la parabola <u>non</u> ha intersezioni con l'*asse x*, come nei disegni qui sotto.

a > 0	*a < 0*	|*a*| ⇨ *0*	|*a*| ⇨ ∞
		P⇨ *asse x*	P⇨*asse y*

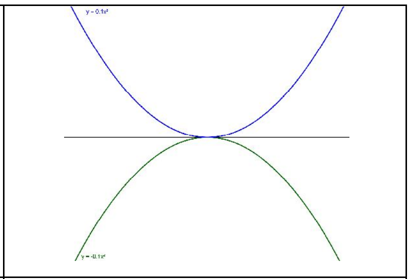
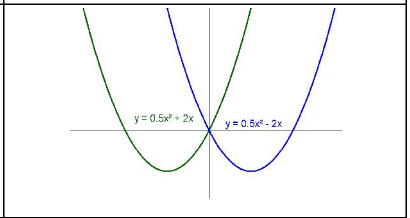
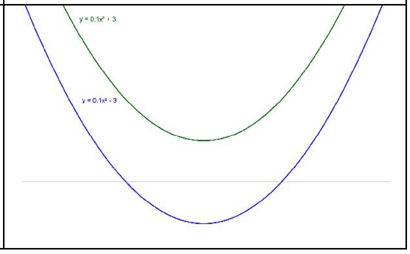
Nelle figure seguenti viene mostrato che:

- ***c*** corrisponde all'ordinata del punto di intersezione con l'*asse y*.
- la relazione tra ***b*** e ***a*** stabilisce posizione della parabola rispetto all'*asse y*



[1] Nel caso dell'<u>equazione oraria di un moto uniformemente accelerato</u>, la *variabile indipendente* è il **tempo** (indicato con la lettera ***t***); nel caso del <u>moto parabolico è la traiettoria a essere una parabola</u>, quindi la *variabile indipendente* è lo *spostamento* lungo uno degli assi del SdR (indicato, generalmente, con la lettera ***x***).

Casi particolari

Caso in cui: b=0 e c=0, **P** : y = $a \cdot x^2$ e V=(0;0). Per tracciarne il grafico basta ricordare che il vertice sta in O e che la concavità è rivolta verso l'alto se a>0 e verso il basso se a<0. Con il *metodo della tabella* si possono stabilire altri punti (sfruttando anche la simmetria rispetto l'*asse y*, che è asse della parabola, in questo caso).	
Caso in cui: b=0 e c≠0, ***P***: $y= ax^2+bx$. **V**=($-\frac{b}{2a}$; $-\frac{b^2}{4a}$). La parabola *passa per O* e le intersezioni con l'*asse x*, che si ottengono risolvendo l'equazione: $x(ax+b)=0$, sono: $x_1=0$ e $x_2 = -\frac{b}{a}$ *(doppio dell'ascissa del vertice).* In figura solo esempi con a>0.	
Caso in cui: $b \neq 0$ e $c=0$, ***P***: $y= ax^2+c$; **V**=(0;c). Le intersezioni con l'*asse x* si ottengono risolvendo l'equazione: $x^2 = -\frac{c}{a}$, che ha soluzione reale se e solo se (sse) a e c sono *discordi* (così il radicando è positivo). Cioè: sse $-\frac{c}{a} > 0$: $x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}}$ e $x_2 =-\sqrt{-\frac{c}{a}}$. In figura solo esempi con a>0.	

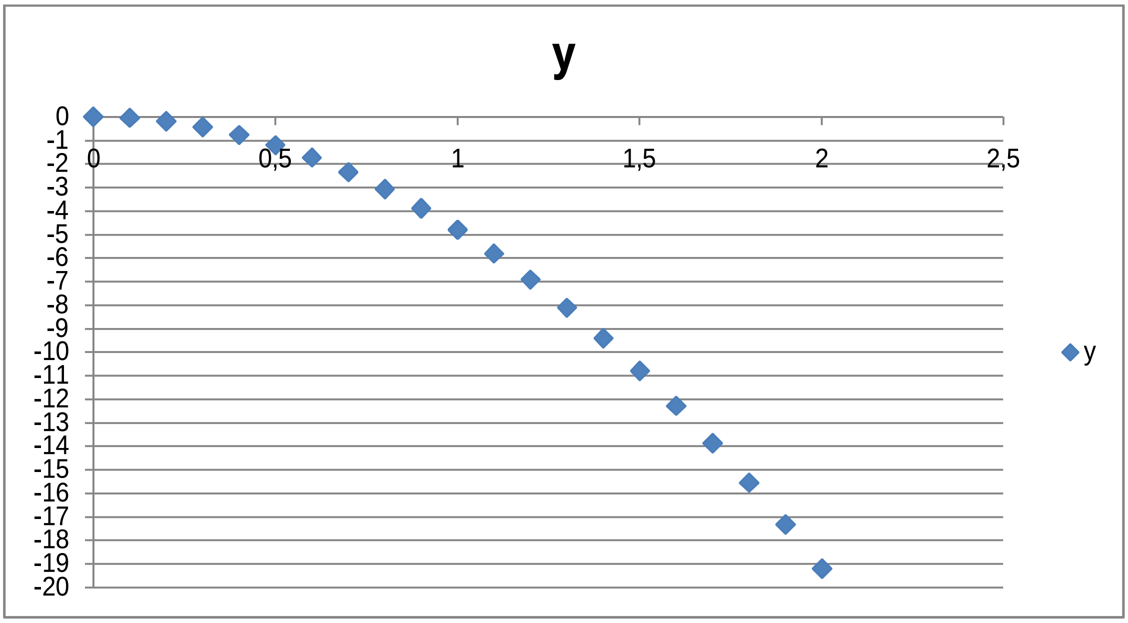
MOTO DI UNPROIETTILE LANCIATO ORIZZONTALMENTE

Ad ogni istante t>0: $v_x = v_{0x}$ (non agisce nessuna forza) e $v_y = -g\,t$ (trascurando l'attrito, agisce solo la **forza peso**). Scriviamo le due leggi orarie:

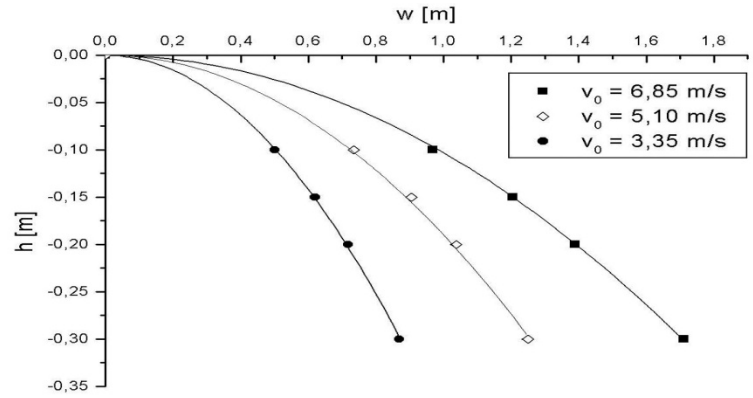
$$x = v_x t \text{ (moto rettilineo uniforme)}; \quad y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 \text{ (moto uniformemente accelerato).}$$

Combinando i due moti, otteniamo l'equazione della traiettoria. La traiettoria di un oggetto lanciato orizzontalmente è un arco di parabola con il vertice nel punto di lancio:

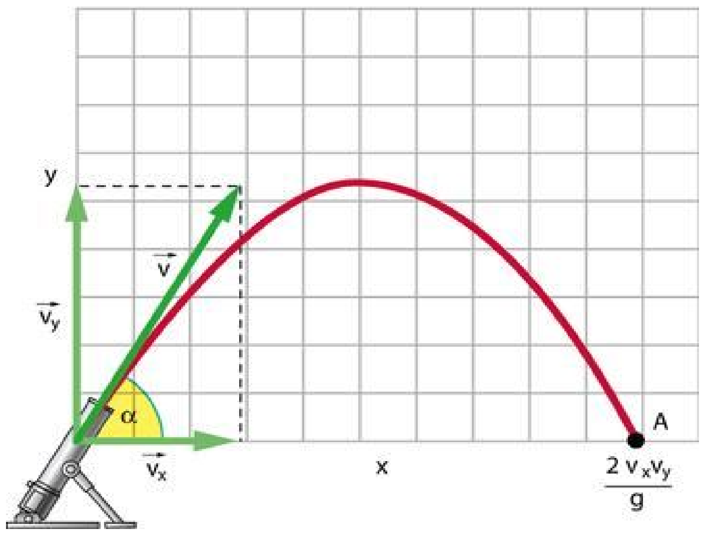
$$\begin{cases} x = v_{0x} t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{x}{v_{0x}} \\ y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{x}{v_{0x}} \\ y = -\frac{g}{2{v_{0x}}^2} x^2 \end{cases}$$



Osserva: abbiamo ottenuto l'equazione di una parabola con **V**≡O perché abbiamo studiato il moto in questo SdR da subito. $a = -\frac{g}{2{v_x}^2}$. L'unica grandezza che può variare è v_x. Sicuramente puoi convincerti che maggiore sarà v_x maggiore sarà l'*ampiezza* della parabola. Ma, poiché v_x sta al denominatore, al crescere del suo valore, a diviene più piccola. Coerentemente con quello che ti abbiamo detto all'inizio; e come viene mostrato nel grafico seguente, che puoi realizzare anche tu con Excel.



MOTO DI UN PROIETTILE CON VELOCITA' INIZIALE OBLIQUA (v_y>0)



In questo caso la velocità ha sia una *componente orizzontale*, sia una *componente verticale*:

$$\vec{v} = (v_{0x}; v_{0y}) = (v \cdot cos\alpha; v \cdot sin\alpha) \quad e \quad v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}.$$

Ad ogni istante t>0: $v_x = v_{0x}$ (non agisce nessuna forza) e $v_y = -g\,t + v_{0y}$ (trascurando l'attrito, agisce solo la **forza peso**). Scriviamo le due leggi orarie:

$x = v_{0x}t$ (moto rettilineo uniforme); $y = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_{0y}t$ (moto uniformemente accelerato);

Seguendo il ragionamento precedente otteniamo l'equazione della traiettoria:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = v_{0x}\,\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{y} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{g}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{v}_{\mathbf{0}\boldsymbol{y}}\,\boldsymbol{t} \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{x}{v_{0x}} \\ y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 + \boldsymbol{v}_{\mathbf{0}\boldsymbol{y}}\,\frac{x}{v_{0x}} \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{x}{v_{0x}} \\ y = -\frac{g}{2{v_{0x}}^2}x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x \end{cases}$$

La traiettoria è una parabola con equazione del tipo: $y= ax^2+bx$. Con $a=-\frac{g}{2{v_{0x}}^2}$, $b=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{v_{0y}}{v_{0x}} : \cancel{2}\left(-\frac{g}{\cancel{2}{v_{0x}}^2}\right) = \frac{v_{0y}}{\cancel{v_{0x}}}\frac{{v_{0x}}^{\cancel{2}}}{g} = \frac{v_{0x}v_{0y}}{g};$$

$$y_V = -\frac{b^2}{4a} = -\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)^2 : \cancel{4}_2\left(-\frac{g}{\cancel{2}{v_{0x}}^2}\right) = \frac{{v_{0y}}^2}{\cancel{{v_{0x}}^2}}\frac{\cancel{{v_{0x}}^2}}{2g} = \frac{{v_{0y}}^2}{2g}$$

Osserva, l'ordinata del vertice corrisponde alla *quota più alta* raggiunto da un oggetto lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_y. A ulteriore conferma che i due moti che compongono il moto parabolico sono simultanei e indipendenti.

Il **libro**, infatti, giunge allo stesso risultato ponendo $v_y = 0$ nell'equazione: $v_y = -g\,t + v_{0y}$, ricavando il valore di t, e sostituendolo nelle equazioni orarie. Procedimento legittimo!

Le intersezioni con l'*asse x* sono 0 (punto di lancio) e $2\frac{v_{0x}v_{0y}}{g}$ (**gittata**)

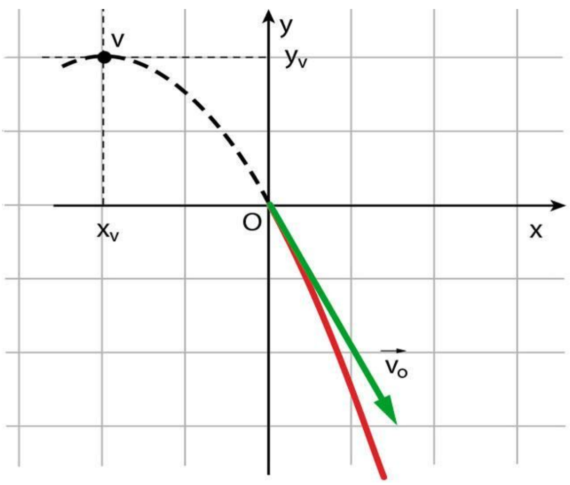
GITTATA

DEF: si chiama **gittata** (L) la distanza che separa il punto di partenza di un corpo lanciato verso l'alto in direzione obliqua dal punto in cui il corpo torna alla quota iniziale. $L = 2\frac{v_x v_y}{g}$.

Essendo la parabola simmetrica rispetto all'asse (retta parallela all'*asse y* e passante per V), *L* (la gittata), solo nel caso in cui O è il *punto di lancio*[2], è doppia dell'ascissa del vertice.

La **gittata massima** si ha per $\alpha=45°$ (per ora non lo dimostriamo, ma ci si può arrivare anche ragionando sulle *simmetrie* dei valori di *seno* e *coseno*, rispetto ad ampiezze di angoli maggiori o minori di 45°, senza seguire il ragionamento difficile che propone il libro).

MOTO DI UN PROIETTILE CON VELOCITA' INIZIALE OBLIQUA (v_y<0)



Le formule trovate si applicano anche a questo caso particolare, ma assumono un **significato fisico** completamente differente dal caso precedente, e poco intuitivo.

Lasciamo agli **esercizi** l'esame di questo caso e teniamolo fuori dalla verifica sulla teoria, per ora.

[2] Sarà tua cura, per risolvere gli esercizi, metterti SEMPRE nella situazione in cui O del SdR è il *punto di lancio*. Se questo proprio non sarà possibile avrai due scelte: o aggiungere dove opportuno la quota di lancio y_0 o utilizzare l'equazione completa della parabola: $y = -\frac{g}{2{v_{0x}}^2}x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x + y_0$.