Leggi di conservazione in meccanica (e simmetria)

§1. Legge di conservazione della quantità di moto

Liberamente tratto da: Battimelli-Stilli, *Le vie della fisica* –Vol. 1, Editori Laterza

DEF Cos'è la **quantità di moto** (***qdm***)? E' una <u>grandezza vettoriale</u> data dal prodotto della massa ***m*** di un corpo (scalare) e la velocità $\vec{v}$ dello stesso (vettoriale): $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$. Tale grandezza serve a *modellizzare* **gli urti**.

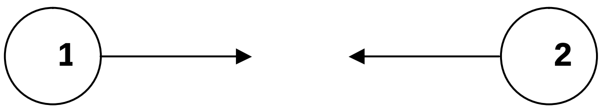
I <u>fenomeni reali</u> ascrivibili a tale modello sono vari: uno scontro fra automobili, una pallina da tennis che rimbalza sul muro, una boccia in movimento che ne colpisce un'altra, ecc...

Analizzare alcuni esempi può aiutarti a capire perché si sia deciso di modellizzare tale classe di fenomeni proprio mediante la ***qdm***.

- Riguardo al contributo della **massa** pensa all'*effetto* differente che producono un'automobile o un autotreno nell'urtarsi, supponiamo <u>con la stessa velocità</u>.
- Per comprendere l'importanza del **modulo** della **velocità** pensa alla differenza di *esito* di una *battuta dall'alto* a pallavolo, effettuata da una stessa persona con una stessa palla quindi - con massa fissata - se il movimento del braccio è *più veloce* o *meno veloce*.
- La necessità di considerare **direzione e verso** della **velocità** si comprende pensando alla differenza che si ha fra urti collineari e urti che avvengono fra corpi che si muovono lungo direzioni diverse (anche supposte <u>fissate le masse e i moduli delle velocità</u>). Pensa all'urto fra due sfere in movimento lungo direzioni differenti.

<u>Per non appesantire troppo la trattazione, vedremo nel dettaglio soltanto: **urti collineari**.</u>

§1.1 Urto fra due *punti materiali* con masse uguali e velocità uguali in modulo e direzione, ma opposte in verso.



Innanzitutto specifichiamo che il **sistema** costituito dai nostri punti materiali **1** e **2** è **isolato** rispetto all'*esterno*, cioè non *scambia* con l'esterno materia né energia.

In particolare la **risultante** delle **forze agenti** è zero (supponiamo l'attrito sia nullo): prima, durante ($\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1} \rightarrow \vec{F}_{1-2} + \vec{F}_{2-1} = 0$) e dopo l'urto.

La sfera **1** (considerata punto materiale) ha massa m_1 e velocità $\vec{v}_1$ e la sfera **2** ha massa m_2 e velocità $\vec{v}_2$. <u>Cominciamo dal considerare il caso in cui $m_1 = m_2 = m$ e $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 = \vec{v}$.</u>

Prima dell'urto la sfera **1** ha: $\vec{p}_1 = m \cdot \vec{v}$ e la sfera **2**: $\vec{p}_2 = -m \cdot \vec{v}$ perciò: $\vec{p}_{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$.

Data la **simmetria del sistema**[1] (stessa massa, stessa velocità in modulo), <u>dopo l'urto</u> (l'apice indica le ***qdm*** dopo l'urto) la configurazione sarà ancora: $\vec{p}_1' = -\vec{p}'_2$ quindi $\vec{p}'_{TOT} = 0$.

(**N.B.** potrebbe anche essere che: $|\vec{p}_1| \neq |\vec{p}_1^{'}|$) <u>Nel complesso sarà perciò: $\vec{p}_{TOT} = \vec{p}'_{TOT} = 0$</u>.

Questo è un caso molto particolare, partendo da questo caso però, anzi riconducendoci a questo, dimostreremo che <u>in un urto la ***qdm*** totale di un sistema isolato si conserva.</u>

§1.2 Dimostrazione della legge di conservazione della *qdm*.

Sapete che <u>sistemi di riferimento in moto relativo uniforme</u> (vettorialmente parlando) sono *fisicamente equivalenti* (**Relatività galileiana**).

La dimostrazione della legge di conservazione della ***qdm*** si basa sulla ricerca (e la scoperta) dell'esistenza di almeno un **SdR** nel quale le ***qdm*** dei punti materiali siano uguali in modulo e direzione ma opposte in verso, come nell'esempio particolare di cui sopra!

Basterà infatti che esista un solo **SdR** che verifichi tale condizione perché, grazie alla **Relatività galileiana**, potremo asserire che <u>in un urto la ***qdm*** totale di un sistema isolato</u>

[1] Il concetto di **simmetria** è centrale in questa trattazione: http://sciencebackstage.blogosfere.it/2010/03/il-teorema-di-noether.html .

si conserva. (***qdm*** che avrà valori differenti a seconda del sistema considerato, certo, ma non è quello il punto: l'importante è che abbia lo **stesso valore** prima e dopo l'urto)

Questo **SdR** che cerchiamo non portà essere in quiete rispetto alle masse, perché nel caso generale non sarebbe $\vec{p}_{TOT}=0$; né potrà muoversi di moto accelerato, (altrimenti addio Relatività galileiana). Questo sistema dovrà muoversi con una certa velocità **u**.

D'ora in poi indicherò **in grassetto i vettori**, ove non mi sarà possibile indicarli mediante l'usuale "freccia sopra". D'ora in poi chiamerò **SdR*** il sistema di riferimento che cerchiamo e **SdR** il sistema di riferimento in quiete rispetto alle masse.

Per trovare **SdR*** procediamo, al solito, per **variabili separate** e non solo perché i conti siano complessi, ma anche per avere la possibilità di comprendere *anche da un punto di vista fisico* i risultati che troviamo e non accettarli soltanto in quanto frutto di calcoli.

Partiamo da caso in cui $m_1 = m_2 = m$ e $\boldsymbol{v}_1 \neq -\boldsymbol{v}_2$. Indicherò con apice ***** le grandezze in **SdR***

Avremo $\boldsymbol{p}_1=m\cdot\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{p}_2=m\cdot\boldsymbol{v}_2$. Quale dovrà essere la velocità relativa **u** di **SdR*** rispetto a **SdR** affinché $\boldsymbol{p}_1^*=-\boldsymbol{p}_2^*$? Dovrà verificare la seguente equazione (nel caso in cui non esistesse **u** l'equazione risulterebbe di impossibile risoluzione: grande invenzione le equazioni...):

$m\cdot(\boldsymbol{v}_1-\mathbf{u})=-m\cdot(\boldsymbol{v}_2-\mathbf{u})$. Facendo i conti l'equazione risulta avere soluzione: $\mathbf{u}=(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)/2$. (N.B. il segno delle velocità è implicito: si tratta di una *somma algebrica*).

Da un punti di vista fisico **O***, se "parte" dal punto medio del segmento che ha m_1 e m_2 come estremi, si mantiene "equidistante" fra m_1 e m_2. Rispetto a **O*** la situazione non è differente perciò da quella particolarissima descritta all'inizio: c'è una *configurazione simmetrica* che non si capisce perché dopo l'urto, non dovrebbe sussistere ancora!

Per vedere quanto sto dicendo e *giocare* con le ***qdm*** in **urti collineari elastici** (cfr **§3**) vai al seguente applet[2]: http://ww2.unime.it/weblab/ita/wf2/urti/urti_ita.htm

Consideriamo ora il caso in cui $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}$ e $m_1 \neq m_2$

Avremo pertanto $\boldsymbol{p}_1=m_1\cdot\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{p}_2=-m_2\cdot\boldsymbol{v}$. Quale dovrà essere la velocità **u** di ***SdR***** rispetto a ***SdR*** affinché $\boldsymbol{p}_1^*=-\boldsymbol{p}_2^*$? Dovrà verificare la seguente equazione: $m_1(\boldsymbol{v}-\mathbf{u})=-m_2(-\boldsymbol{v}-\mathbf{u})$. Facendo i conti l'equazione risulta avere risultato: $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\,(m_1-m_2)/m_1+m_2$.

L'interpretazione fisica è un po' meno intuitiva di prima: **u** è una velocità "pesata" sulle masse. Facciamo un esempio per chiarire le idee: se $m_1=2\cdot m_2$, $\mathbf{u}=1/3\cdot\boldsymbol{v}$.

Affinché **O*** sia punto di simmetria fra m_1 e m_2 che si muovono con velocità opposte, dovrà "controbilanciare in termini di velocità" il contributo in massa della ***qdm***: Nell'esempio ora fatto, poiché $m_1=2\cdot m_2$, perciò $\vec{p}_1=-2\vec{p}_2$, allora **O*** "andrà" verso m_2.

Nel caso generale sarà: $\boldsymbol{p}_1=m_1\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{p}_2=m_2\boldsymbol{v}_2$. La velocità **u** di **SdR*** rispetto a **SdR** affinché $\boldsymbol{p}_1^*=-\boldsymbol{p}_2^*$ dovrà, al solito, verificare la seguente equazione: $m_1(\boldsymbol{v}_1-\mathbf{u})=-m_2(\boldsymbol{v}_2-\mathbf{u})$. Facendo i conti l'equazione risulta avere risultato: $\vec{u}=\dfrac{m_1\cdot\vec{v}_1+m_2\cdot\vec{v}_2}{m_1+m_2}$

Concludendo: nel caso in cui non siano uguali le masse o i moduli della velocità ("o" inclusivo) puoi metterti nel ***sistema di riferimento*** del ***centro di massa*** (come nell'applet precedente) e scoprire così che la simmetria del sistema si mantiene!

Per il **principio di relatività galileiana** che *asserisce essere i sistemi in moto relativo rettilineo uniforme fisicamente equivalenti*, il fatto che la ***qdm***$_{TOT}$ che il sistema ha *prima* dell'urto si conservi *dopo* l'urto, dev'essere un principio generale: una **legge**.

La ***legge di conservazione della qdm*** afferma che: *un urto non provoca alcuna variazione della quantità di moto totale del sistema isolato formato dai corpi che urtano*.

[2] Per cambiare il valore di masse e velocità scrivi nelle caselle corrispondenti i valori che scegli e premi ogni volta invio. Il puntino giallo sull'asse indica **O***. Se scegli *configurazioni simmetriche*, cioè in cui le *qdm* dei due carrelli sono uguali in modulo, **O*** resterà fermo (**u**=0), in caso contrario lo vedrai muoversi e, se riuscirai a concentrarti su quello, potrai constatare che, rispetto a lui $\vec{v}^*_1=-\vec{v}_2^*$ e $\vec{v}^{*\prime}_1=-\vec{v}^{*\prime}_2$!

Per *giocare* con **urti non collineari** fra una palla ferma ed una palla in movimento, nel sistema del laboratorio e nel *sistema del centro di massa (o baricentro)*, vai su: http://www.ba.infn.it/~zito/museo/frame19.html

§2. Urti elastici e nuova legge di conservazione

Gli urti si possono **classificare** in base al *confronto* fra il modulo della velocità prima e dopo l'urto. Per semplicità rimettiamoci nel caso in cui $m_1 = m_2 = m$ e $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 = \vec{v}$..

Indichiamo con la lettera *v* il modulo della velocità prima dell'urto e con *v'* il modulo della velocità dopo l'urto. COnsiderando solo i valori assoluti i segni "meno" scompariranno

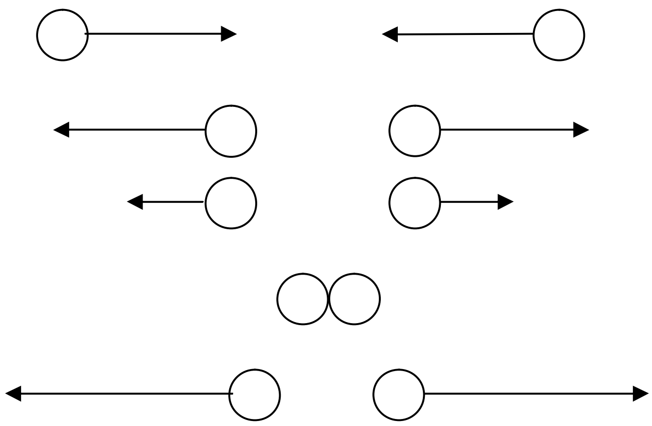
DEF*ni*: se *v'=v* l'**urto** si dice **elastico**. Se *v'<v* l'**urto** si dice **anelastico**. Se *v'=0* l'**urto** si dice **completamente anelastico**. Se *v'>v* l'urto si dice **più che elastico** (o **esplosione**)

Come già sai la legge di conservazione della ***qdm*** vale qualunque sia il tipo di urti: riferendoti ai casi rappresentati puoi notare come la ***qdm***$_{TOT}$ sia infatti sempre 0 in tutti.

Ma **l'urto elastico** gode di un'*ulteriore simmetria*. Proviamo a caratterizzarla: se filmassi gli urti schematizzati sopra e di ciascuno provassi a confrontare il filmato *al dritto* con quello *al rovescio* (dal punto di vista temporale), sapresti individuare il verso "giusto" di ciascuno tranne che dell'urto elastico: la **simmetria** di cui gode l'urto elastico ha perciò a che fare con *l'equivalenza del verso di scorrimento del tempo*. Si dice che si è in presenza di un **processo reversibile** o di una **invarianza per inversione temporale**.

La legge di conservazione della ***qdm*** derivava già dalla constatazione di una **simmetria**. Godendo gli **urti elastici** di un'**ulteriore simmetria** rispetto agli altri urti è dunque legittimo ritenere che per gli urti elastici valga un'**ulteriore legge di conservazione**.

Negli *urti elastici collineari fra corpi con stessa massa e stessa velocità* è che il modulo della velocità si conserva prima e dopo l'urto: il *segno* della velocità non è più significativo.



Matematicamente il modo per far "sparire" il segno è considerando il quadrato:

v^2=cost.

Se le sfere non hanno stessa massa, ma hanno stessa velocità, tale grandezza andrà "pesata sulle masse" e sarà la quantità $m_1 \cdot v^2 + m_2 \cdot v^2 = (m_1 + m_2) \cdot v^2$=cost (prima e dopo l'urto).

Se le sfere hanno stessa massa e a variare sono le velocità sarà: $m \cdot v_1{}^2 + m \cdot v_2{}^2 = m \cdot (v_1{}^2 + v_2{}^2)$=cost(prima e dopo l'urto) .

Nel caso più generale, cioè quello in cui masse e velocità sono differenti, per gli urti elastici, prima e dopo l'urto varrà $m_1 \cdot v_2{}^2 + m_2 \cdot v_2{}^2 = \cos t$. L'unità di misura di tale grandezza è: $\frac{Kg \cdot m^2}{s^2} = N \cdot m = J$

§3. Energia cinetica e lavoro. Il teorema delle forze vive.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come un fenomeno, riguardante un sistema di due corpi, isolato e che gode d'invarianza temporale, può essere rappresentato dalla legge di conservazione: $m_1 \cdot v_2{}^2 + m_2 \cdot v_2{}^2 = \cos t$. Nel caso di un corpo unico possiamo ritenere che tale legge diverrà: $m \cdot v^2 = \cos t$. Un buon esempio riguardante un solo corpo è il moto rettilineo uniforme: sappiamo che perché si verifichi la risultante delle forze dev'essere 0.

Andiamo ora a considerare come descrivere **moti reversibili che avvengano però sotto l'azione di forze la cui risultante sia diversa da zero**.

Una massa attaccata ad una molla che oscilla su un piano senza attrito e una pallina che rimbalza elasticamente in assenza d'attrito sono buoni esempi: per entrambi dovesti riuscire a visualizzare l'indistinguibilità del filmino "proiettato al dritto e al rovescio".

E' ovvio che la grandezza $m \cdot v^2$ non si conserva per questi moti, possiamo supporre che *in generale* non si conservi in presenza di **forze**. Sarà interessante andare a stabilire un modo per calcolarne la *variazione*, cioè una relazione del tipo: $\Delta(m \cdot v^2) = ?$

La nostra grandezza ***?*** dovrà avere le seguenti caratteristiche:

1) Dovrà contenere la grandezza $\vec{F}$ visto che è la forza responsabile di tale variazione
2) Dovrà avere le stesse dimensioni di $m \cdot v^2$, e cioè $N \cdot m$
3) Dovrà essere scalare come è $m \cdot v^2$
4) Dovrà tenere conto di quei casi in cui $m \cdot v^2$ si conserva pur in presenza di forze

Consideriamo l'azione di una forza costante su un corpo di massa ***m*** inizialmente fermo.

Per $\vec{F} = \cos t$: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F_{//} \cdot s = F \cdot s_{//}$, per non appesantire troppo la simbologia consideriamo il caso in cui $\vec{F} // \vec{s}$ e utilizziamo il secondo principio della dinamica e le equazioni del moto uniformemente accelerato che sappiamo essere la conseguenza dell'azione di una forza costante. Limitandoci ai moduli delle grandezze in gioco si ha: $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ e: $v = a \cdot t$. Da cui: $W = F \cdot s = m \cdot a \cdot s = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (a \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

Il **lavoro** quindi è la grandezza che cerchiamo e non solo in virtù dei conti qui sopra ma anche perché risponde a tutte e quattro le nostre richieste:

1) Contiene la grandezza $\vec{F}$
2) Ha come unità di misura proprio $N \cdot m$ cioè il Joule, che si indica: J
3) E' scalare come $m \cdot v^2$
4) In caso la $\vec{F}$ è ortogonale ad $\vec{s}$ il lavoro è 0 e infatti $\Delta(m \cdot v^2) = 0$ poiché il modulo della velocità resta costante.

DEF La grandezza $K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ prende il nome di **energia cinetica** e si misura in Joule

DEF Diamo il nome di **ENERGIA** a quelle grandezze che rendano conto di fenomeni di *cambiamento*.

NB: Anche il **LAVORO** è un'energia: rende conto infatti del *cambiamento di posizione* di un corpo ma è un tipo di energia differente dall'energia cinetica: quest'ultima infatti è un'***energia*** che consideriamo ***posseduta*** dal corpo mentre il lavoro è un'energia che consente la transizione fra stadi di *energia posseduta* differente: ***energia in transito***.

Il caso che abbiamo considerato, al solito è il più semplice: un corpo che possiede energia cinetica nulla, sottoposto all'azione di una **forza costante** che compie **lavoro** su di esso, cioè lo sposta, aumenta la propria energia cinetica.

Spero non faticherai a credere che se il corpo inizialmente non fosse stato fermo, quindi possedesse già un'energia cinetica non nulla, l'intervento di una forza, variando la velocità del corpo, avrebbe variato anche la sua energia cinetica.

E altresì che se il fenomeno fosse più complesso, quindi o ci fosse un sistema in luogo di un unico corpo, o più forze in luogo di una sola, o una combinazione dei due casi, si avrebbe da calcolare: il **lavoro totale** compiuto da tutte le forze agenti, o dalla risultante delle forze che è lo stesso e la **variazione** di **energia cinetica totale** che è data dalla somma delle energie cinetiche dei componenti il sistema.

THM delle forze vive: una massa ***m*** che si sposta lungo una traiettoria sotto l'azione di forze varia la sua energia cinetica di una quantità pari al lavoro totale compiuto dalle forze agenti lungo la traiettoria. In simboli: $W_{TOT} = \Delta K_{TOT} = K_f - K_i$.

Tale teorema, come già detto può essere generalizzato ad un *sistema di masse*...

§4. Moti reversibili: una definizione quantitativa

Il **teorema delle forze vive** è senz'altro interessante. Per esempio permette di stabilire a che altezza arriverà una certa massa lanciata con velocità iniziale $v_0 \neq 0$ con minor fatica di quanto potevamo fare con le sole equazioni del moto uniformemente accelerato[3].

Però siamo giunti a formularlo a partire da una questione ancora più interessante, tutt'altro che chiarita: in che modo caratterizzare in maniera univoca i **moti reversibili**? (fra l'altro il ***THM delle forse vive*** vale sia per moti reversibili che per moti irreversibili)...

Torniamo sulla **DEF di reversibilità** che abbiamo dato: un moto è reversibile quando non si è in grado di capire, guardando un *ipotetico film del moto*, se il film è proiettato in avanti o indietro. Aggiungiamo: compatibilmente con la situazione dinamica data.

E sì, infatti se vediamo (**ES1**), un oggetto che si muove in orizzontale partendo da fermo e accelerando e ci viene detto che la forza agente è **l'attrito** scopriamo che è il filmino *al rovescio*, se invece ci viene detto che la forza agente è la **forza elastica** non sappiamo distinguere se sia *al rovescio* e la molla l'abbia frenato, nella versione *al dritto*, o se sia *al dritto* e la molla era semplicemente compressa prima del PLAY!

ES2: un compagno viene da te dopo aver ripreso un certo moto e ti dice che l'unica forza agente sul corpo è la **forza peso**. Proietta poi il filmato nei due versi: nel primo si vede una pallina *cadere* da quota *h₁* a quota *h₂* con accelerazione di modulo $9{,}8\frac{m}{s^2}$ passando da una velocità $\vec{v}_1$ ad una velocità $\vec{v}_2$, con $\vec{v}_1 < \vec{v}_2$ nel secondo si vede lo stesso corpo che risale da quota h_2 a quota h_1 passando da una velocità $-\vec{v}_2$ ad una velocità $-\vec{v}_1$, con accelerazione di identico modulo. Entrambi i filmati sono compatibili con il fatto che su quel corpo abbia agito come unica forza la forza peso.

Spero che questi esempi ti abbiano convinto che **la reversibilità o meno di un moto** dipende dal **tipo** di **forza** che lo determina: qualsiasi moto generato dalla **forza peso** o da una **forza elastica**, per esempio, è un moto **reversibile**, viceversa tutti i moti *imputabili* ad una forza d'**attrito** sono moti **irreversibili**.

Cerchiamo un **criterio un po' più quantitativo per stabilire se un moto sia reversibile o meno**. Per far questo analizziamo gli esempi a nostra disposizione.

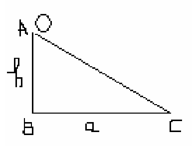
Perché un **moto** sia **reversibile** deve accadere che un corpo che parte da un certo punto **A** con velocità $\vec{v}_i$ e arriva in un punto **B** con velocità $\vec{v}_f$, sotto l'azione della stesa forza possa partire dal punto **B** con velocità $-\vec{v}_f$ e arrivare nel punto **A** con velocità $-\vec{v}_i$.

Cioè , in un moto reversibile *le velocità "di ritorno" debbono essere punto per punto uguali in modulo alle velocità di "andata"*. Ma allora *è possibile associare alla massa, in ogni punto,* ***una e una sola energia cinetica***, indipendentemente dal fatto che quel punto sia stato raggiunto "in andata" o "al ritorno" che è costante punto per punto.

Ma allora la variazione di energia cinetica totale calcolata lungo un **percorso chiuso** in un **moto reversibile** è **0**. Ma $\Delta K_{AB} = L_{AB}$ quindi se un moto è reversibile il **lavoro** delle forze che lo determinano, calcolato su una **traiettoria chiusa** è **0**. $L_{ABA} = 0$

Sinora abbiamo visto un esempio un po' banale per ritenere questa conclusione di carattere generale. Andiamo a vedere un esempio leggermente più complesso: andiamo a

[3] K_0 sarà: $\frac{1}{2}\cdot m\cdot {v_0}^2$ e l'energia cinetica nel punto di massima altezza, quando cioè la velocità sarà 0, sarà 0 anch'essa. Il lavoro effettuato dalla forza peso sarà un lavoro resistente pari a: $-m\cdot g\cdot h$. Non mi resterà che eguagliare le grandezze in gioco come indicato dal THM: $0-\frac{1}{2}\cdot m\cdot {v_0}^2 = -m\cdot g\cdot h$, da cui : $h=\frac{{v_0}^2}{g}$



calcolare il lavoro compiuto dalla **forza di gravità** su una biglia che si muova lungo un **percorso triangolare**: $W_{TOT} = W_{AC} + W_{CB} + W_{BA}$

Per calcolare il lavoro W_{AC} puoi seguire due strade: o utilizzi la possibilità di calcolare il lavoro come prodotto fra il modulo della forza e la componente dello spostamento parallela alla forza, cioè: $W = F \cdot s_{//}$ da cui si ha $W_{AC} = mgh$, oppure consideri la possibilità di scomporre lo spostamento **AC** in una *scalett*a in cui le componenti ortogonali a $m \cdot \vec{g}$ danno contributo nullo al lavoro e quindi, di nuovo risulta: $W_{AC} = mgh$. $W_{CB} = 0$ perché lo spostamento è ortogonale alla forza. $W_{BA} = -mgh$ perché lavoro e spostamento sono paralleli ma hanno verso opposto. $W_{TOT} = mgh - mgh = 0$.

In generale, per ottenere il lavoro della **forza di gravità** lungo una **traiettoria chiusa ABA** di forma qualunque posso *approssimare* sempre tale traiettoria con una "scaletta" nella quale le componenti ortogonali alla forza danno contributo nullo e la somma dei tratti che non danno contributo nullo risultano essere due segmenti: **AB** e **BA**, di modo che $W_{TOT} = 0$.[4]

Tale regola vale solo per i *moti reversibili*. Supponiamo infatti che la forza che agisce sulla massa che si muove lungo un segmento in andata **AB** e ritorno **BA** (in **B** c'è un **urto completamente elastico** che fa tornare indietro la massa prima che la velocità diventi nulla) sia una **forza d'attrito.** L'attrito radente è costante in modulo, parallelo allo spostamento ma opposto in verso allo spostamento stesso, perciò la **velocità** della massa diminuisce sia nel percorso di andata che nel percorso di ritorno e quindi: $W_{TOT} = K_f - K_i < 0$.

Concludendo: *il lavoro totale compiuto lungo una qualsiasi traiettoria chiusa da forze che generano moti reversibili è sempre 0*.

Usiamo questa caratteristica per dare la **DEF** quantitativa che cercavamo di tali moti: *Un **moto** si dice **reversibile** se e solo se determinato da **forze** il **lavoro** delle quali, calcolato lungo un qualsiasi **percorso chiuso**, è **0***.

§5. La legge di conservazione dell'energia meccanica. L'energia potenziale.

La **forza di gravità**, per spostare una massa ***m*** dalla quota h_1 alla quota h_2 compie un **lavoro** quantificabile in: $W_{1-2} = m \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2$ qualunque percorso segua.

D'altra parte, per il ***THM delle forze vive*** si ha: $W_{1-2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$. Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza: $mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$, cioè: $mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$.

Siamo giunti alla la **legge di conservazione dell'energia meccanica** *gravitazionale* che asserisce: $mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \cos t$ *in tutti i punti* e quindi *in tutti gli istanti* del moto[5].

Ma cos'è ***mgh***? La sua unità di misura è il Joule e quindi si tratta di un'energia. Il suo nome è **energia potenziale gravitazionale**[6]: $\Delta U = U_B - U_A = W_{B-A}$. Si può ottenere calcolando li lavoro che la forza compirebbe "se libera d'agire" (cfr esempio sopra)

[4] Discorso analogo, ma con dei conti più complicati, si può fare per la **forza elastica** che non è una forza costante in modulo ma è proporzionale in modulo, collineare in direzione e di verso opposto allo spostamento/deformazione della molla: $\vec{F}_{el} = -k \cdot \vec{x}$.

[5] Pensa ad un corpo che cade da *h* e arriva al suolo. K_0=0 e la quantità di cui sopra è data da *mgh*, quando tocca il suolo $K_f = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ e l'altra è zero: *mgh* e $\frac{1}{2}mv^2$ sono due grandezze che si trasformano una nell'altra!

[6] *potenziale* si riferisce alla ***posizione*** occupata, ***gravitazionale*** alla forza che la determina: è un tipo di energia che cambia espressione a seconda della forza che la determina: per l'energia elastica è $-\frac{1}{2}kx^2$.

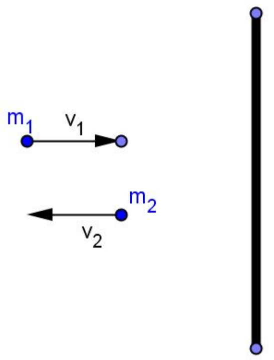
La **formulazione generale della legge di conservazione dell'energia meccanica** di cui sopra è: $E_M = K + U = \cos t$ e vale per tutti i **moti reversibili**.

Le *forze che determinano moti reversibili* si dicono, appunto: **forze conservative**

Allegato1. Urto di una massa finita contro una massa "infinita"

Sinora abbiamo parlato di urti fra coppie di punti materiali. Andiamo ad analizzare il caso in cui un punto materiale (d'ora innanzi **p.m.**) urti in maniera "completamente elastica" contro una superficie perfettamente liscia, illimitata, rigida, di massa "infinita". Chiamerò tale superficie "parete".

Partiamo dal caso in cui la direzione della velocità del **p.m.** sia ortogonale alla superficie. **N.B.**: per non creare sovrapposizioni di notazione con la pressione indicherò la **qdm** con la lettera **q**. Vi ricordo che il grassetto <u>delle minuscole</u> lo utilizzo per i vettori.



Ovviamente m_1=m_2 (il software di disegno, **geogebra**, non mi consente di nominarli nello stesso modo!) e $\boldsymbol{v_1} = -\boldsymbol{v_2}$

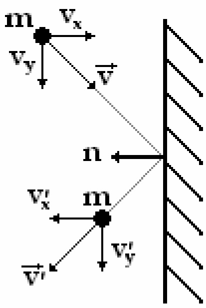
Uno dei modi per scrivere in simboli la legge di conservazione della **qdm** è : $\Delta\mathbf{q}_{TOT}=\mathbf{0}$. In questo caso $\Delta\mathbf{q}_{TOT}= \Delta\mathbf{q}_{PTO}+\Delta\mathbf{q}_{PAR}$

$\Delta\mathbf{q}_{PTO}$+= **-**2m$\boldsymbol{v}$[7], perciò, affinché $\Delta\mathbf{q}_{TOT}=\mathbf{0}$ dovrebbe essere $\Delta\mathbf{q}_{PAR.}$=**+**2m$\boldsymbol{v}$

Apparentemente però la parete resta ferma, perciò $\boldsymbol{v}_{PAR}$ =0. Del restola massa della parete è infinita (se consideri un caso "reale", ad esempio l'urto di una pallina di gomma contro un muro, il rapporto fra le due masse è tale da avallare quest'ipotesi).

$\Delta\mathbf{q}_{PAR}=0\cdot\infty$ che sai dalla matematica essere una **forma indeterminata**. Questo fatto "ci fa gioco". Affinché "tutto torni", cioè per poter ascrivere anche questo fenomeno all'interno della famiglia degli urti, possiamo ritenere (anzi dobbiamo) che $\Delta\mathbf{q}_{PAR.}$=2m$\boldsymbol{v}$ proprio come "volevamo". Possiamo ritenere cioè che la parete assorba la quantità di moto necessaria afficnhé valga anche in questo caso la *legge di conservazione della quantità di moto*.

Premessa 2 Cosa accade se la velocità del **p.m.** <u>non</u> è ortogonale alla parete?



Innanzitutto un breve accenno la **legge della riflessione** (che rivedremo occupandoci d'ottica): l'***angolo d'incidenza*** (formato dalla direzione del **p.m.** incidente e dalla normale alla parete nel punto d'incidenza) è uguale all'***angolo di riflessione***. Inoltre: retta d'incidenza, retta di riflessione e normale al piano nel punto d'incidenza sono **complanari**.

Quel che più ci interessa è che però $\Delta\mathbf{q}_{PTO}$+= (**-**2m$\boldsymbol{v}_x$; 0) e cioè che l'unico "contributo effettivo" ai fini del calcolo della variazione della ***qdm*** ci deriva dalla componente ortogonale al piano quindi, di fatto, possiamo limitarci, nella trattazione che seguirà, a considerare tale componente.

Premessa 3 Il **modello cinematico di gas perfetto** prevede che tale gas sia costituito da **N** punti materiali (tutti uguali fra loro), con velocità iniziale non nulla, che <u>interagiscono **solo** con le pareti del recipiente</u> che le contiene (ciò significa ritenere nulle le forze d'interazione molecolare), <u>**solo** mediante urti completamente elastici</u> (l'energia cinetica complessiva si conserva) e che **non** <u>interagiscono con l'esterno</u> (ciò significa ad esempio considerare nulla la forza di gravità).

[7] Una variazione è una differenza fra valore finale e valore iniziale. Se il segno "meno" vi disturba potete scriverla anche come 2m$\boldsymbol{v_2}$ che è quanto riportava il libro e cui non avevo fatto troppo caso...