Cinematica del punto materiale – moti rettilinei

DEF La **cinematica** è lo studio dei moti *senza occuparsi dei fenomeni* che li provocano.

Cominciamo cioè con il descrivere i moti. Penseremo dopo a *come mai* avvengono.

Lo studio di un ***moto reale*** è molto difficile. Per questo ci occupiamo di ***moti semplificati***.

Iniziamo con lo studiare i moti IGNORANDO sia le **rotazioni** che i corpi possono effettuare attorno a un *asse* (**CONTRESEMPIO**: pensa a un pallone calciato o al moto di una danzatrice) sia alle **deformazioni** che tali corpi possono subire durante il moto (**CONTRESEMPIO**: pensa alle nuvole che corrono nel cielo, o di nuovo al pallone).

Facciamo finta che il moto di un corpo avvenga senza la presenza dell'aria (che invece condiziona molto i moti) e non ci occupiamo né di quello che accade *attorno* al corpo, né di quello che accade *dentro* al corpo.

Cioè cominciamo con il pensare che tutta la **massa** del corpo sia concentrata in un punto geometrico (che il corpo cioè sia SENZA DIMENSIONI!).

DEF Chiamiamo **PUNTO MATERIALE** un corpo del quale studiamo solo **moti traslatori** e per il quale pensiamo che tutta la massa sia concentrata in un punto.

L'approssimazione di un corpo a punto materiale non dipende da com'è o come non è il corpo, ma dal tipo di studio che vogliamo fare su di lui.

DEF1 Chiamiamo **posizione** di un punto materiale una terna di coordinate ($x;y;z$) di un riferimento di assi cartesiani Oxyz.

DEF2 La **posizione** $\vec{s}$ è la *punta* del "vettore posizione" di componenti ($x;y;z$). Vettore che ha la *coda* in O. La posizione è una grandezza vettoriale.

DEF3 Conoscendo la **traiettoria** (**DEF5**) del punto, la **posizione** può essere data dalla **distanza** (**DEF8**) percorsa dal punto, sulla traiettoria, dall'origine di questa.

Cominceremo studiando moti su un **segmento** e poi studieremo moti parabolici e moti circolari, quindi non usciremo dal piano cartesiano Oxy!

DEF4 Un punto materiale si **muove** (o compie un moto) se, col trascorrere del *tempo* ***t***, modifica la sua *posizione* $\vec{s}$.

DEF5 La linea che unisce le *posizioni occupate da un punto materiale*, in moto, in istanti di tempo successivi, si dice **traiettoria**.

N.B. La definizione di *posizione* e *la definizione di moto* ci dicono che abbiamo bisogno di un **sistema di riferimento fisico** (SdRf) per descrivere un moto.

DEF 6 Un **SdRf** è: un riferimento $Oxyz$ (oppure una traiettoria già conosciuta)+Un metro+Un cronometro.

Per descrivere un moto

1. Si deve scegliere un sistema di riferimento (il più comodo possibile).
2. Si deve conoscere (nel SdRf scelto) la **posizione** del punto materiale al tempo $\mathbf{t}_0=0$ cioè quando *parte* il **cronometro**.

3. *Tutti i moti sono relativi*: non ha senso dire che qualcosa è *fermo* o è *in moto* in senso **assoluto**!

ES1 Una persona seduta su di una nave sarà in **moto** rispetto al sistema di riferimento del porto ma sarà ferma rispetto a quello della nave stessa. **ES2** Rispetto al passeggero di un treno in moto, saranno gli alberi a muoversi (e nel verso opposto) e non lui. Ecc.

DEF7 Chiamiamo **spostamento** $\boldsymbol{\Delta\vec{s}}$ di un punto materiale [in un *intervallo di tempo* **$\Delta t = t_f - t_0$**] il vettore: $\vec{s}_f - \vec{s}_0$. Cioè: la differenza fra la *posizione finale* $\vec{s}_f$ (al tempo $\mathbf{t_f}$) e la *posizione iniziale* $\vec{s}_0$ (al tempo $\mathbf{t_0}$).

E' semplicissimo da trovare solo se la traiettoria è un segmento!

DEF7 Chiamiamo **distanza percorsa** dal punto materiale (**d**) o il *modulo* del vettore spostamento o, conoscendo la traiettoria, la lunghezza della parte di traiettoria percorsa (matematicamente saprai come si calcola solo in quinto. In alcune situazioni – ES gare di ciclismo, o problemi di fisica – viene fornita da chi la conosce già).

N.B. Lo spostamento - a differenza della **distanza** che è sempre positiva – come tutti i **vettori**, può avere anche un segno (che dipende dal SdRf scelto).

Nel **Sistema Internazionale** l'unità di misura del modulo dello **spostamento** è il ***metro***, l'unità di misura dello scorrere del tempo è il ***secondo***.

Anche per la misura del **tempo** si opererà la scelta di un istante $t=0$ (quindi si sceglierà un *sistema di riferimento*), mentre il **verso** di scorrimento è fissato (il tempo non torna indietro!).

Diagrammi t-s ed equazioni orarie

Conoscere il **moto** di un punto materiale significa conoscere, in ogni istante di tempo **t**, la posizione corrispondente $\vec{s}$ del punto materiale.

DEF8 La *relazione* tra *insieme* dei tempi e *insiemi* delle posizioni corrispondenti, si chiama **equazione oraria**.

Conoscere il moto di un punto materiale significa conosce **l'equazione oraria** del moto.

DEF9 Chiamiamo **diagramma orario del moto** il *grafico* formato dalle coppie (***t***;***s***), cioè il grafico dell'equazione oraria.

Attenzione a non confondere questo *grafico astratto* che *vive* nel piano t-s, con la *traiettoria* che *vive* nel SdR *Oxyz*!

Ricapitoliamo i **principali simboli** necessari per lo studio della cinematica:

t : generico istante di tempo rappresentabile con un punto sull'asse dei tempi;

t_0 : istante iniziale; t_f : istante finale; $\Delta t = t_f - t_0$ intervallo di tempo;

$\vec{s}$ generica posizione rappresentabile con un punto sull'asse delle posizioni;

$\vec{s}_0$: posizione all'istante t_0 ; $\vec{s}_f$: posizione all'istante t_f ;

$\Delta\vec{s} = \vec{s}_f - \vec{s}_0$: **spostamento**.

Velocità media e velocità istantanea. Il moto uniforme.

Quando si studia il moto di un punto materiale, non solo ci interessa conoscere lo spostamento $\Delta\vec{s}$ ma il tempo impiegato a effettuarlo: se $|\Delta\vec{s}\,| = 2$ Km $= 2\cdot 10^3$ m, c'è una bella differenza fra percorrerlo a piedi, in bicicletta o in auto:

- a piedi si percorrerà in: 30 min = $1{,}8\cdot 10^3$ s
- in bicicletta si percorrerà in: 5 min = $3\cdot 10^2$ s
- in automobile si percorrerà in: 2 min = $1{,}2\cdot 10^2$ s

Per confrontare questi moti diversi bisogna introdurre una grandezza data dal **rapporto** fra lo spostamento e il tempo impiegato ad effettuarlo, quindi lo spostamento percorso nell'unità di tempo (ricordi le grandezze unitarie?)

DEF $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$:= **velocità media**

La velocità è una *grandezza derivata*: e la sua **u.d.m.** nel S.I. è il *metro al secondo*: m/s.

DEF Sse un punto materiale effettua spostamenti uguali in tempi uguali (spostamenti e tempi sono direttamente proporzionali), diciamo che si muove con **velocità costante** (**moto uniforme**).

Ma se la velocità non è costante come facciamo a conoscerne il valore in ogni istante del moto (cioè in ogni posizione che in tale istante viene occupata)?

DEF Con **velocità istantanea**, $\vec{v}_{ist}$, di un punto materiale intendiamo la velocità media in un intervallo di tempo piccolissimo, che contenga l'istante considerato. Nelle automobili viene indicata dal **tachimetro**. $\vec{v}_{ist} = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$ si legge: *limite, **per** delta **t** che tende a zero, **del** rapporto fra lo **spostamento** e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo.*

N.B. In un **moto uniforme**, $\vec{v}_m = \vec{v}_{ist}$ in ogni istante

Accelerazione media e istantanea. Il moto uniformemente accelerato.

La velocità non è quasi mai costante: un'auto *accelera* e *rallenta* continuamente. E' necessario quindi introdurre una nuova grandezza che tenga conto delle variazioni di velocità e della *velocità*[1] con cui esse si verificano: questa grandezza è l'**accelerazione**.

DEF $\vec{a}_m = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ = **accelerazione media**

L'**u.d.m.** dell'accelerazione, nel S.I. è il *metro al secondo quadro*: m/s^2: dire che un'auto ha un'accelerazione pari a 2 m/s^2 significa che la sua velocità *aumenta* di 2 m/s *ogni secondo*.

DEF Accelerazione istantanea: $\vec{a}_{ist} = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ Si legge: *limite, per delta **t** che tende a zero, del rapporto fra variazione della velocità, e intervallo di tempo in cui tale variazione si verifica.*

DEF Se la variazione di velocità (aumento o diminuzione) è costante nel tempo (variazioni di velocità e intervalli di tempo in cui avvengono sono direttamente proporzionali), parliamo di **moto uniformemente accelerato**. In questo moto, in ogni istante, $\vec{a}_{ist} = \vec{a}_m$

[1] In senso lato, si può definire *velocità* di variazione di una grandezza, il rapporto tra la *variazione di grandezza* e l'*intervallo di tempo* in cui questa variazione avviene. Quindi l'accelerazione è la *velocità* con cui varia la **velocità**.

Il moto rettilineo uniforme

Se la velocità è **costante**, essendo un **vettore**, vuol dire che non cambiano né il suo modulo, né la sua direzione, né il suo verso. Quindi la *traiettoria* è rettilinea, cioè è un **segmento**. [Possiamo levare i simboli di vettore, una volta che la traiettoria è rettilinea].

Nel **moto uniforme** $v = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{cost}$ con $\Delta \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s_0}$ e $\Delta \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t_0}$.

Supponiamo per semplicità di iniziare a misurare il tempo dall'istante iniziale $\boldsymbol{t_0} = 0$.
Avremo: $v = \frac{\Delta s}{t}$; quindi: $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s_0} = v\,\boldsymbol{t}$; quindi: $\boldsymbol{s} = v\,\boldsymbol{t} + \boldsymbol{s_0}$.

DEF $\boldsymbol{s} = v\,\boldsymbol{t} + \boldsymbol{s_0}$ è l'**equazione oraria** di un moto uniforme, studiato con $\boldsymbol{t_0} = 0$.

DEF Il **diagramma orario** di un moto uniforme [cioè il grafico dell'equazione oraria nel piano $\boldsymbol{t}$ - $\boldsymbol{s}$] è un **segmento**, in cui **la pendenza** corrisponde alla **velocità**.

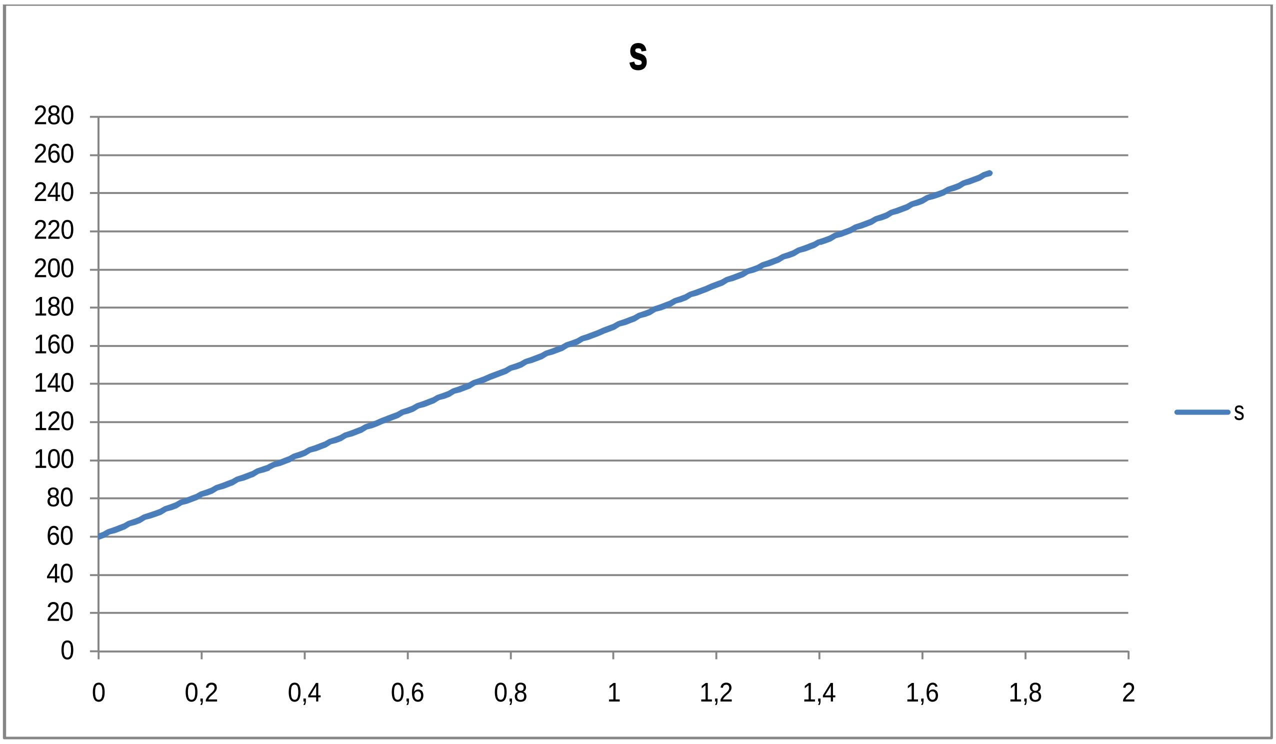
ES Nel riferimento *autostrada Roma – Firenze* (O = centro di Roma), seguiamo il moto di un'automobile che parte da Orte [circa 60 km da Roma: $\boldsymbol{t_0} = 0$ e $\boldsymbol{s_0}$ = 60 km=$6 \cdot 10^4$m] e viaggia, con **velocità costante**, a 110 Km/h, sino a Firenze ($\boldsymbol{s_F}$=250km=$2,5 \cdot 10^5$m da Roma). [Attenzione: nel nostro *modello* stiamo supponendo che Roma, Orte e Firenze siano collegate da segmenti!].

In quanto tempo l'automobile arriverà a Firenze? Scrivi l'**equazione oraria** del moto di **A** e disegnane il **diagramma orario**.

$v = 110\,\frac{Km}{h} = 110\,\frac{10^3 m}{3.6 \cdot 10^3 s} = \frac{110}{3.6}\frac{m}{s} = 30.6\,\frac{m}{s}$ $\qquad$ $\boldsymbol{s} = 30.6\,\frac{m}{s}\,\boldsymbol{t} + 6 \cdot 10^4 m$

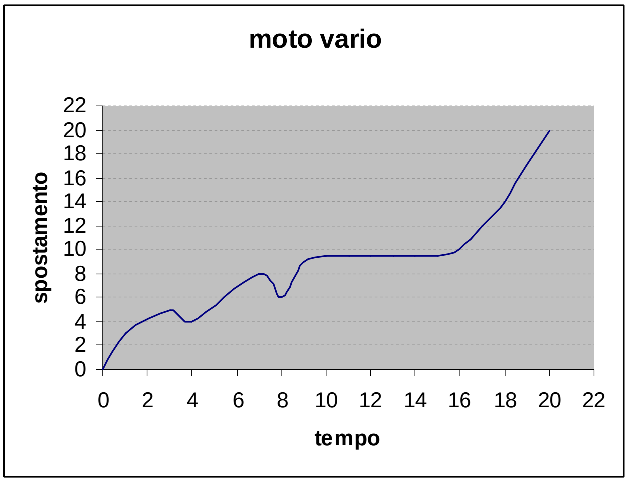
$30.6\,\frac{m}{s}\,t_F + 6 \cdot 10^4 m = 2,5 \cdot 10^5 m$ $\qquad$ $t_F = \frac{2,5 \cdot 10^5 m - 6 \cdot 10^4 m}{30.6\frac{m}{s}} = \frac{(25-6)10^4 m}{30,6}\,\frac{s}{m} \approx 6,2 \cdot 10^3 s$

Visti i valori che ottengo con i calcoli, decido di disegnare il **diagramma orario** usando le u.d.m. non del S.I. Mi aiuto inoltre con **Excel**.



Velocità istantanea in un moto vario: approccio grafico

Cosa succede se ci troviamo dinanzi ad un **moto vario**? Un moto cioè in cui la velocità cambia in modulo (continuiamo a considerare la **traiettoria rettilinea**). Il diagramma orario di tale moto potrebbe essere del tipo seguente:



Finché la curva ***sale***, il punto materiale sta avanzando lungo la traiettoria, ma quando la curva ***scende*** vuol dire che il punto sta "tornando indietro" sulla traiettoria, cioè che si muove con verso opposto a quello individuato come positivo

Che succede nell'intervallo di tempo che va da 10s a 15s? Il punto "sta fermo", cioè: v=0

In un piano t-s la **velocità** è la **pendenza** di un segmento.

Se il diagramma orario non è un segmento e congiungiamo due suoi punti (ogni punto dà due informazioni: il tempo e la posizione corrispondente), la pendenza del segmento è la velocità media che il punto materiale ha nell'andare da una posizione all'altra.

Per avere la **velocità istantanea** in una certa posizione, si deve considerare la pendenza del segmento tangente al diagramma in quel punto.

Usando un righello, puoi seguire l'*andamento qualitativo* del moto: puoi vedere in quali tratti la *velocità aumenta in modulo* (cioè aumenta il modulo della pendenza della tangente) e in quali *diminuisce in modulo*; in quali *è positiva* (quindi il punto materiale si muove nel verso che hai stabilito come positivo) e in quali *è negativa* (quindi il punto materiale *torna indietro*).

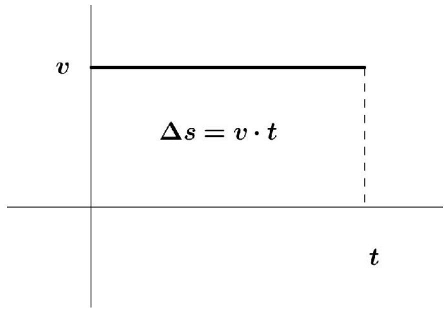
Il moto rettilineo uniformemente accelerato

Nel **moto uniformemente accelerato** $a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \cos t$ con $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v_0}$ e $\Delta \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t_0}$.

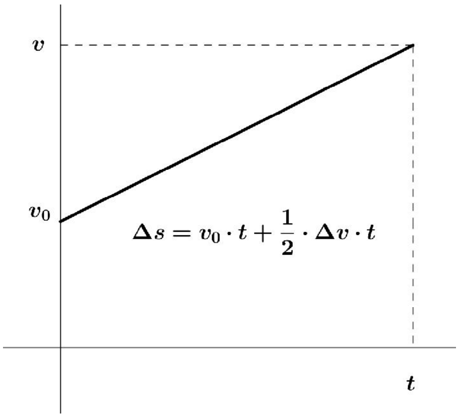
Supponiamo per semplicità di iniziare a misurare il tempo dall'istante iniziale $\boldsymbol{t_0} = 0$. Avremo: $a = \frac{\Delta v}{t}$; quindi: $\boldsymbol{v} - v_0 = a\ \boldsymbol{t}$; quindi: $\boldsymbol{v} = a\ \boldsymbol{t} + v_0$ che non è l'equazione oraria del moto uniformemente accelerato ma può essere utile nei seguenti casi, per esempio:

Problema tipo	***v***	*a*	***t***	***v₀***
Una macchina che va a 36km/h, accelera con *accelerazione costante* di 1m/s². Che velocità avrà dopo 10s?	?	D	D	D
Una macchina che va a 36km/h, accelera con *accelerazione costante*. Che accelerazione deve avere per raddoppiare la sua velocità iniziale in 10s?	D	?	D	D
Una macchina che va a 36km/h, accelera con *accelerazione costante* di 1m/s². Quanto tempo impiega a raddoppiare la velocità iniziale?	D	D	?	D
Una macchina che va a una certa velocità v_0, accelera con *accelerazione costante* di 1m/s². Quanto vale v_0 se, dopo 10 secondi che accelera, ha raggiunto una velocità di 72km/h?	D	D	D	?

Per trovare l'equazione oraria di un moto uniformemente accelerato, ripartiamo dal moto uniforme e osserviamo che $\Delta \boldsymbol{s} = v\ \boldsymbol{t}$ può avere un significato geometrico: se rappresentiamo in un piano *t-v* un moto uniforme, abbiamo quanto mostrato nel grafico a destra:



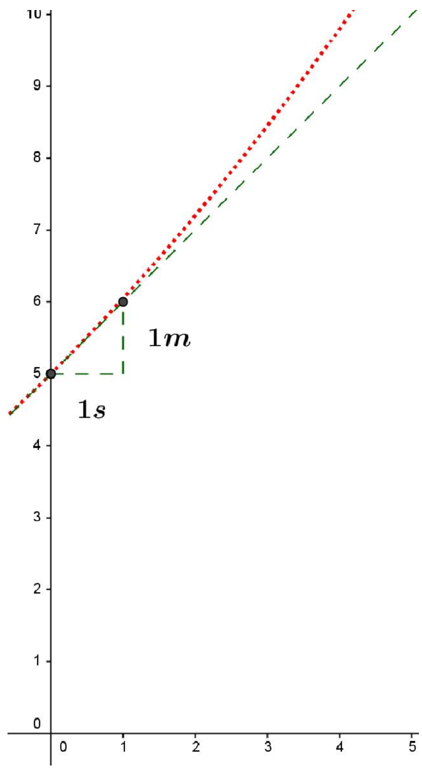
Osserviamo anche che, un qualunque grafico nel piano t-v, può essere approssimato con una scaletta. Come avviene effettivamente con i pixel dello schermo di un PC quando tracciamo curve in un software (come Geogebra).



Se ora rappresentiamo in un piano *t-v* un moto uniformemente accelerato, abbiamo quanto mostrato nel grafico a sinistra. Aggiungendo che **Δ*v*** = *a* ***t***, otteniamo: $\Delta s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}(a \cdot t) \cdot t$.

DEF $\boldsymbol{s} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \boldsymbol{t}^2 + v_0 \cdot \boldsymbol{t} + s_0$ è l'**equazione oraria** di un moto uniformemente accelerato, studiato con $\boldsymbol{t_0} = 0$.

Il **diagramma orario** di un moto uniformemente accelerato è un **segmento di parabola** come quello in rosso nella figura a destra.



L'equazione oraria corrispondente è: $\boldsymbol{s} = \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot \boldsymbol{t}^2 + 1 \cdot \boldsymbol{t} + 5$

Per non appesantire troppo, non ho inserito le u.d.m.

Dal grafico puoi vedere come sia $s_0 = 5m$.

Ho tracciato un segmento di tangente (tratteggiata in verde) nel punto (0s;5m) e la pendenza di questa tangente è $v_0 = 1\frac{m}{s}$.

Che l'accelerazione è quella da me indicata non hai modo di verificarlo da sola/o dal grafico.

Concludendo, per risolvere qualunque esercizio riguardante il moto uniformemente accelerato, devi utilizzare le equazioni seguenti:

v = *a* ***t*** + v_0 e $\boldsymbol{s} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \boldsymbol{t}^2 + v_0 \cdot \boldsymbol{t} + s_0$.

Nel caso in cui l'accelerazione in gioco sia l'accelerazione di gravità (moti di caduta libera), sarà (se usi un SdR ha l'asse y rivolto verso l'alto): ***v*** = -*g* ***t*** + v_0 e $\boldsymbol{s} = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \boldsymbol{t}^2 + v_0 \cdot \boldsymbol{t} + s_0$

Nei problemi di **frenata** o **lancio verso l'alto** (accomunati dal fatto che v_F=0 e *a*<0) sarà:

a ***t*** + v_0=0 ➔ t = -v_0/*a* (positivo perché *a*<0) che, sostituito nell'equazione oraria, ti dà una comoda relazione tra posizione e velocità iniziale, che puoi usare negli esercizi:

$$\boldsymbol{s} - s_0 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 + v_0 \cdot \left(-\frac{v_0}{a}\right) \Rightarrow \Delta \boldsymbol{s} = -\frac{v_0^2}{2a}$$

Vedi nel file "moto uniformemente accelerato correzione" i differenti significati dell'accelerazione negativa).