Salsa d'infinito: ingredienti di facile reperibilità

Se vi chiedessi secondo voi cos'è l'**infinito**, probabilmente la maggior parte di voi proporrebbe sinonimi di **illimitato**, di **infinitamente grande**, si riferirebbe alla possibilità di *aggiungere* sempre; al "sempre più grande" (chi non ha mai incontrato nella vita l'odioso ragazzino che, in un edificante gioco al rilancio, stroncava ogni proseguio dicendo: "..e io, uno sempre più di te!". Grrr...) illustrato dalla banale immagine in **figura 1**; i più attenti parlerebbero della possibilità di dividere una grandezza in parti sempre più piccole, o di avvicinarsi quanto vogliamo a un punto su una retta, o a un valore numerico; di poter zoomare, nell'ambito dei numeri reali, quanto vogliamo; parlerebbero quindi anche dell'**infinitamente piccolo** rappresentato rozzamente in **figura 2** (particelle subatomiche).

Ma in una linea di lunghezza finita (una semicirconferenza, per esempio) vi sono tanti punti quanti ve ne sono su un'intera retta (perciò: infiniti). E ciò si può dimostrare con un ragionamento abbastanza semplice, ben *rappresentato* dalla **figura 3**. E quindi non c'è bisogno di andare né nell'infinitamente grande né nell'infinitamente piccolo per trovare l'infinito: può nascondersi benissimo lì: sotto i nostri occhi...

Ma sopratutto, al sostantivo "infinito" si posso attribuire significati differenti. Ci torneremo. Eccome...

Ma, per ora, facciamo un passo indietro: come si fa a stabilire se un insieme, di numeri o di oggetti, è infinito oppure no? Contarli uno a uno non è *percorribile*, eh?

- Come in ogni misura che si rispetti, si deve partire dallo stabilire un'**unità di misura** e sarete d'accordo che l'insieme dei **numeri naturali N** è una buona unità di misura infatti è sia semplice sia infinito.
- L'azione del **misurare** un oggetto consiste nel <u>confrontare l'oggetto con l'unità di misura</u>. Nel nostro caso, confrontare diventa stabilire (o meno) una **corrispondenza biiunivoca** (uno a uno) tre gli elementi dell'insieme che vogliamo misurare e il nostro insieme unità di misura.

Facendo questo gioco di andare a verificare se un insieme è infinito o no, emergono aspetti paradossali, come il fatto che *sottinsiemi propri* dei numeri naturali, come i numeri pari o i numeri dispari, o i quadrati perfetti, sono anch'essi insiemi infiniti! **Figura 4**.

E la cosa divertente è che questo aspetto, considerato paradossale per secoli (da **G. Galilei**, per esempio), alla fine è stato scelto per dare una definizione d'insieme infinito!

DEF (di **Dedekind**, 1872) un **insieme** è **infinito** quando <u>si può</u> porre in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

DEF Il "numero degli elementi" di un insieme si chiama **cardinalità** (o **potenza**) dell'insieme (dall'aggettivo cardinale).

DEF L'insieme $\boldsymbol{N}$ e gli insiemi che è possibile mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\boldsymbol{N}$ si dice hanno la **cardinalità del numerabile** (i naturali si utilizzano per numerare, no?) e questa cardinalità si indica con il simbolo: $|\boldsymbol{N}|$ (un adattamento del significato usuale di modulo, all'infinito) oppure con il simbolo: $\aleph_0$ (il simbolo $\aleph$ si legge: "aleph": è la prima lettera dell'alfabeto ebraico).

Si dimostra che l'insieme **Z** degli interi e l'insieme **Q** dei numeri razionali hanno cardinalità del numerabile!

DEF E si dimostra che, invece, gli insiemi: **I** dei numeri irrazionali ed **R** dei umeri reali hanno una cardinalità superiore, pari a $2^{|\mathbf{N}|}$ (indicata anche con: $\aleph_1$): la **cardinalità del continuo**.

Chi fra voi volesse conoscere queste dimostrazioni, potrebbe leggere un agile libretto dal titolo Roberto Zanasi, "Verso l'infinito ma con calma - Un dialogo su matematica, insiemi e numeri", Scienza express oppure, più brevemente, qui: http://www.alessandraprofangelucci.it/matematica/analisi (approfondimento numeri razionali e approfondimento numeri reali). **Figura 5**.

Esistono dunque diverse "potenze" d'infinito (chissà poi se ci si ferma ad $\aleph_1$ o...).

E sapete inoltre dallo studio dei limiti che - all'interno della potenza del continuo - esistono diverse velicità con le quali si può tendere all'infinitamente grande o al'infinitamente piccolo: <u>esistono **diversi ordini d'infinito** e **d'infinitesimo**</u>.

Come se non bastasse c'è la grande distinzione storica:

Infinito potenziale e Infinito attuale (Domingo Paola)

L'**infinito potenziale** caratterizza grandezze come il tempo, lo spazio e i numeri che, pur essendo in ogni loro manifestazione finite, possono essere *accresciute* o *suddivise* a piacere.

L'infinito potenziale è da intendersi come *processo* che può andare avanti quanto si vuole, senza esaurirsi, senza mai completarsi e, in tal senso, è un concetto essenzialmente <u>negativo</u>: è ciò che <u>*non*</u> *è* finito.

Secondo tale accezione, *infinito* non è ciò al di là del quale non c'è <u>nulla</u>, ma ciò al di là del quale c'è sempre <u>qualcosa</u>.

Per esempio, considera la successione dei numeri naturali: 1, 2, 3, 4, … i puntini di sospensione indicano che puoi andare avanti quanto vuoi: infatti dopo aver raggiunto un numero n qualunque, puoi proseguire dicendo semplicemente $n+1$. A ogni passo ottieni sempre un numero finito e ben preciso, ma puoi proseguire quanto vuoi, perché dopo i numeri che hai già elencato ce ne sono tanti altri. Quanti? Quanti ne vuoi, in linea di principio: *infiniti.*

Si può pensare a un infinito potenziale per <u>accrescimento</u> (aggiunta di parti nuove alle grandezze considerate) e per <u>divisione</u> (suddivisione di una grandezza data in parti sempre più piccole): da una parte si tende verso *l'infinitamente grande* e pertanto **l'illimitato**; dall'altra si tende verso *l'infinitamente piccolo*, ossia si considerano grandezze sempre finite, ma piccole quanto si vuole, anche se <u>sempre maggiori della grandezza nulla</u>.

L'**infinito attuale** è invece qualcosa <u>al di là del quale non c'è nulla</u>: non è un processo, ma una qualità, una proprietà che può essere o meno posseduta.

Dal punto di vista della matematica moderna <u>i punti di un segmento</u> sono infiniti e <u>costituiscono un infinito attuale</u> e non potenziale<u>, in quanto sono già</u>

dati, in un tutto unico, e non si costruiscono per accrescimento come avviene per la successione dei numeri naturali, né si ottengono per divisioni successive.

Aristotele nega la possibilità di un infinito in atto: ne nega sia l'esistenza, sia la possibilità di concepirlo. Quando si parla dell'*horror infiniti* della filosofia aristotelica, ci si riferisce proprio al concetto di infinito attuale che, appunto, Aristotele riteneva inconsistente.

Ma questi aspetti notevoli, stupefacenti, interessanti ma stranoti, potete trovarli in tanti libriccini che si trovano in natura, magari proprio nella biblioteca di scuola.

Per esempio, oltre a quello sopra: Lucio Lombardo Radice, "L'infinito", Editori Riuniti; oppure: Eli Maor (traduttrice: Maria Spoglianti), "All'infinito e oltre", Gruppo Ugo Mursia Editore.

Io oggi non vi parlerò di questi aspetti ma di altri un po' meno battuti: "RAPPRESENTAZIONI (visive) DELL'INFINITO".

Ovviamente ci saranno delle immagini. Altrettanto ovviamente ci sarà della matematica (e non poca).

Tratto da: "Rappresentazioni dell'infinito"

Marta Menghini – Alessandra Angelucci

Università di Roma "La Sapienza" – Dipartimento di Matematica

Sommario

Il fatto di avere degli strumenti, e soprattutto un linguaggio, che permettono di parlare dell'infinito in modo non vago è una caratteristica propria della matematica. E non soltanto dell'**analisi matematica** (che state studiando quest'anno), che è impregnata dei concetti di infinito e infinitesimo, ma anche dalla **geometria** che offre la possibilità, mediante il supporto delle **immagini**, di affrontare da un altro punto di vista questo concetto e le sue differenti accezioni.

Oggi vi mostrerò attraverso alcuni esempi tratti dalla geometria - la **prospettiva**, la **spirale logaritmica**, l'**inversione circolare**, il **modello di Poincaré per la geometria iperbolica** - la pluralità di significati della parola infinito.

Introduzione

L'infinito dunque non è un unico concetto ma una rete di concetti e l'utilizzo di una sola parola, al singolare, rischia di occultare questa pluralità di significati. A tale rischio si è cercato di porre rimedio servendosi di aggettivi. Due i principali: **potenziale** e **attuale**.

Nel 2000 due matematici, Lakoff e Núnez, hanno proposto un tentativo di riconciliazione: la loro *Metafora dell'Infinito* (**BMI**: Basic Metaphor of Infinity) propone infatti di concettualizzare l'infinito attuale come il risultato finale di un processo iterativo che però si può solo illustrare per passi.

Gli esempi che seguono vogliono illustrare la pluralità di significati della parola infinito, anche alla luce di tale metafora.

Per le **immagini** si rimanda alla presentazione in Power Point. I numeri delle figure si riferiscono ai numeri di pagina delle slides della presentazione.

La prospettiva

Una delle più semplici visioni d'infinito che abbiamo la trovate nelle **figure 1** e **2**.

Questa fotografia dà l'idea di quel che accade quando si costruisce, in prospettiva, l'*immagine* di un punto all'infinito: il punto comune ad un fascio di rette parallele.

Immagine, in senso matematico: come corrispondente di un punto in una funzione.

Quello offerto dalla **prospettiva** è uno dei metodi più semplici, e anche più antichi, per rappresentare l'infinito. Lo studio teorico della prospettiva nasce, infatti, nel XV secolo, ad opera di **Leon Battista Alberti**, **Piero della Francesca**, **Albrecht Dürer** Le **Figure 3** e **4** ritraggono Dürer stesso (1471 – 1528) alle prese con la costruzione materiale della figura in prospettiva punto per punto.

Vediamo un uso consapevole della prospettiva in **Paolo Uccello** (1436-1477): *"Il miracolo dell'ostia profanata"* (**figura 5**) ma già molto tempo prima erano note tecniche prospettiche, almeno relative alla prospettiva centrale. Uno degli esempi più antichi: *"Stanza delle Maschere"* (**figura 6**).

Interessantissimo l'uso che si fece della prospettiva nel **teatro barocco** (**figura 8**) per la creazione di scenografie volte a suscitare stupore e meraviglia, oltre che per la realizzazione della struttura architettonica dei teatri stessi. In quest'epoca si colloca anche il gioiellino architettonico della **Galleria Borromini**, ospitato da Palazzo Spada a Roma (**figura 7**).

Spero per voi che abbiate affrontato lo studio degli aspetti tecnici della prospettiva nelle ore di disegno, a scuola. In caso contrario mi spiace per voi ma non posso deviare così tanto dal mio percorso per illustraveli io!

Mi soffermerò solo sul fatto che alla base della prospettiva stanno le due azioni del ***proiettare*** e del ***segare***: la prima operazione trova riscontro nel processo della visione, per cui si conducono dal centro di *un* occhio (centro di proiezione **O**) tutti i raggi visivi che vanno ai punti della figura. La seconda operazione corrisponde alla formazione dell'immagine della figura stessa sopra il quadro (in grigio in **figura 9**).

Quando la figura da rappresentare è una ***conica*** le sezioni rappresentate saranno a loro volta *coniche*, con la possibilità, a seconda della posizione reciproca di figura da rappresentare, quadro e osservatore, di *vedere* il processo che conduce da un tipo di conica all'altra a seconda de:

- la diversa collocazione dei *punti all'infinito* della conica da rappresentare
- la resa prospettica di questa.

Applichiamo questo procedimento a un'ellisse posta sul "pavimento": il **piano orizzontale**. Le figure rappresentate sono rispettivamente:

- ancora un'ellisse (zero *punti all'infinito*) quando l'ellisse è *oltre* il quadro, **fig. 9a**,

- una parabola (*un punto all'infinito*), quando l'ellisse *taglia* il quadro ed è tangente al piano dell'osservatore (piano perpendicolare al pavimento e passante per **O**) **fig. 9b**;
- un'iperbole (*due punti all'infinito*), quando l'ellisse taglia sia il quadro che il piano dell'osservatore (la porzione posteriore all'osservatore "ricompare" sul quadro come secondo ramo dell'iperbole): **fig. 9c**

Pur essendo stata costruita dagli artisti-matematici in funzione di un rappresentazione pittorica più corrispondente alla realtà, lo spazio a cui la prospettiva si riferisce non è lo spazio *umano*: terrestre, ma lo spazio astratto euclideo: lo spazio matematico classico.

Inoltre la nostra visione è *bifocale* mentre la prospettiva ha "un occhio solo". Tutto ciò comporta, dal punto di vista artistico, che spesso la messa in prospettiva di un'immagine non sia poi effettivamente realistica, cioè corrispondente alla nostra visione dell'immagine in questione.

Un'osservazione didattica: nelle "rotaie" (**figg. 1-2**) l'immagine *colpisce*: vedo quel punto *infinitamente* lontano. Ma già nei quadri la tecnica pittorica prende il sopravvento e non ci si fa più caso all'infinito (anche perché i quadri in genere rappresentano luoghi terrestri e, quindi, a distanza finita) a meno che il pittore non cerchi di renderlo esplicito o di evocarlo (cfr alcune tele famose del ROMANTICISMO o alcune stampe di epoca moderna del grafico Escher).

Lo stesso per le coniche: se osservo le tre figure separatamente ho delle immagini statiche che non evocano nulla. Se invece ho la possibilità di vedere il passaggio graduale da una conica all'altra, ecco che l'infinito ricompare: o almeno ricompare la sua *ombra.*

Una nota per i colleghi presenti: come spesso in didattica, omettendo il processo che porta da un'immagine ad un'altra si perde anche il concetto.

Passiamo ora ad un'altra visione dell'infinito.

La spirale logaritmica (figura 10)

In una lettera diretta a P. Mersenne, il 12 settembre 1638, **Descartes** (1596 – 1650) propone di caratterizzare la **spirale logaritmica** mediante una delle sue proprietà meno evidenti: se ρ è il raggio uscente da un punto **A** (polo della spirale) c'è la stessa proporzione tra la lunghezza curva ANB e la lunghezza del segmento AB, e tra la lunghezza della curva ANBC e la lunghezza del segmento AC (**figura 10**); ovvero, sinteticamente - posta s la lunghezza di una porzione di curva e ρ la lunghezza del raggio corrispondente: $\frac{s}{\rho} = k$

Con k ($\neq 1$) costante che individua quel che **Torricelli** (1607-1647) chiamerà la *specie* della spirale e che la caratterizza completamente.

C'è da fare una precisazione non banale: il punto **A**, seppur chiaramente *visibile* nel disegno, è un punto "inaccessibile" della spirale, passando infatti attraverso una matematica di livello universitario (i curiosi possono trovare i conti sul mio sito, nell'articolo da cui è tratto questo intervento, nella sezione MATEMATICA → ANALISI

→ LICEO SCIENTIFICO) l'equazione diventa: $\rho = a^{\omega}$ e sapete (spero) che: $\lim_{\omega \to -\infty} a^{\omega} = 0$.

Dunque il polo **A** risulta essere un *punto asintotico* della spirale (il verso positivo, nelle rotazioni, vi ricordo che è quello antiorario, perciò quello negativo è quello oratio).

Questa *curva mirabilis* (chiamata così dal matematico **Jakob Bernoulli**. Il perché lo vedremo fra poco) ci permette di incontrare l'infinito due volte: e in due modi non del tutto equivalenti, visto che l'*infinitamente piccolo* è differente dall'*infinitamente grande*; e, ancora, differenti dalle modalità della prospettiva: qui c'è la rappresentazione di un *percorso infinito* e, nel caso del polo, percorso che si avvicina ad un punto "visibile" senza mai raggiungerlo.

Il risultato finale di un processo iterativo che però si può solo illustrare per passi, quindi, stando alla BMI il polo di una spirale è un **infinito attuale** che, paradossalmente, sta lì sotto i nostri occhi senza che possiamo mai vederlo realmente!

Nel caso della prospettiva invece l'infinito non viene raggiunto mediante un processo ma "fotografato": costretto, per costruzione, al finito!

Jakob Bernoulli (1654-1705) trovò molte proprietà della spirale logaritmica, e la considerava a tal punto *mirabilis* che volle fosse scolpita sulla sua tomba con la seguente didascalia: "*Eadem mutata resurgo*" [Sebbene cambiata, rinasco identica] Questa frase si riferisce ad una delle sue *scoperte*: se si opera su una spirale logaritmica con uno ZOOM (cioè si effettua una similitudine) si ottiene una spirale ***uguale*** a quella di partenza [stessa forma e stessa lunghezza!]. Ritroviamo in questa proprietà della spirale logaritmica la definizione di insieme infinito di **Dedekind**: la biiettività con un sottoinsieme proprio.

Ancora una nuova immagine - questa volta non in senso matematico - di infinito, come di un processo continuo: senza fine, in cui, pur muovendomi, resto ferma: non arrivo a nessun approdo: resto nello stesso punto.

Un altro argomento:

L'inversione circolare[1]

Figura 11. Sia dato un cerchio ***C*** di centro **O** e raggio ***r***=1 (per semplificarci un po' i conti, ma si può fare utilizzando circonfrenze di raggio qualunque!). Ad ogni punto **P** del piano associamo un punto **P'** della semiretta **OP** tale che **OP OP' =** r^2 =1.

La trasformazione che porta i punti **P** nei punti **P'** si dice inversione circolare, il cerchio ***C*** si dice *cerchio d'inversione*, il punto **O,** *centro d'inversione*. L'inversione è definita su tutto il piano escluso il punto **O**.

In coordinate polari, e ponendo $r = 1$, potremmo scrivere l'equazione dell'inversione nel modo seguente: $\rho' = \frac{1}{\rho}$.

L'inversione circolare stabilisce una **corrispondenza biunivoca** tra i punti del piano interni al cerchio, escluso il punto O, e i punti del piano esterni al cerchio.

[1] Agazzi E. - Palladino D., 1998, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Milano, Arnoldo Mondadori

Per poter estendere il campo di esistenza a <u>tutto</u> il piano bisogna dunque introdurre un *punto all'infinito* che sia **immagine di O** e, reciprocamente, ammettere che l'inversione circolare porti tale punto in O.

Infatti, se **P** si avvicina ad **O**, e quindi ρ a zero, **P'** va verso il punto all'infinito della retta **OP**, e, man mano che **P** va all'infinito **P'** si avvicina ad O (riesci a vederlo?).

Si pone un problema evidente: in un piano euclideo <u>ogni retta passante per O individua *due infiniti*</u>. Perché quanto sopra sia consistente, dovremo innanzitutto <u>far coincidere questi due infiniti in un punto solo</u>.

Inoltre <u>vi sono infinite rette passanti per O</u>, quindi, oltre che identificare "gli infiniti di ciascuna retta" dovremo identificare gli infiniti di <u>tutte</u> le rette.

Di fatto il *centro d'inversione* diventa <u>il corrispondente di tutti i punti all'infinito delle infinite rette passanti per O, cioè di tutti i punti all'infinito del piano</u>.

Questo fatto comporta che l'inversione circolare trasformi *rette*, <u>non</u> passanti per **O**, in *circonferenze* passanti per **O**, infatti: <u>il punto all'infinito della retta, apparentemente doppio nella raffigurazione euclidea, va a chiudersi nel centro d'inversione</u>.

Per lo stesso motivo l'inversione circolare trasforma *circonferenze* passanti per **O** in *rette* e *circonferenze* <u>non</u> passanti per **O** in *circonferenze*.

Se riesci a considerare una retta <u>come una circonferenza di raggio infinito</u> potresti sintetizzare quanto prima nella seguente proprietà: *l'inversione circolare trasforma circonferenze in circonferenze*.

Le modalità di trasformazione delle rette da parte dell'inversione circolare sono sintetizzate nella **fig. 14** che ci mostra la <u>trasformata per inversione di una *scacchiera*</u> (della parte di scacchiera esterna alla circonferenza d'inversione).

Vediamo alcune trasformate per inversione circolari di curve classiche[2].

Un'**ellisse** *contenente* la circonferenza d'inversione diventa una curva chiusa interna ad essa (di quarto grado): **fig.15**, coerentemente con una delle proprietà dell'inversione circolare: <u>mandare i punti esterni in punti interni e viceversa e tenere unita ("ferma") la circonferenza d'inversione.</u>

La trasformata per inversione di una **parabola** sarà una cardioide (**fig. 16**).

Un'**iperbole equilatera** *tangente* alla circonferenza si trasforma nel simbolo "sintattico" dell'infinito (una *lemniscata*): i punti di tangenza restano uniti mentre i rami vanno a convergere nel centro d'inversione. **Figura 17**.

La trasformata per inversione di una **spirale logaritmica** con polo nel centro d'inversione viene illustrata in maniera più espressiva proprio dalle equazioni: abbiamo una curva di equazione: $\rho = a^{\omega}$ che diventa: $\frac{1}{\rho'} = a^{\omega}$ cioè $(\rho')^{-1} = a^{\omega}$ cioè: $\rho' = a^{-\omega}$ quindi una spirale logaritmica di stessa specie della precedente ma ottenuta *ruotando in senso orario*, invece che antiorario (**Figura 18**)!

[2] Maor E., 1987, *To infinity and beyond*, Boston, Birkhauser,

Se consideriamo una **spirale con polo sull'asse delle *x***, nel punto ($\frac{1}{2}$;0) il polo andrà in (2;0) e in **O** si creerà un secondo polo dando luogo, citando le parole di Donald Coxeter, ad uno dei modi più belli per portare l'infinito al finito. Escher ne ha tratto spunto per un disegno particolarmente suggestivo: **figura 19**.

L'inversione circolare è già interessante in sé, ai fini del nostro discorso, ma è anche propedeutica all'introduzione di un altro *ambiente matematico* che consente la rappresentazione dell'infinito al finito:

Il modello per la geometria iperbolica di Poincaré[3]

H. Poincaré, La Science et l'Hypothèse, Cap. IV: "*Immaginiamo un mondo rinchiuso in una grande sfera e sottoposto alle leggi seguenti: la temperatura non è uniforme: è massima al centro e diminuisce man mano che ce ne si allontana, per ridursi allo zero assoluto quando si raggiunge la sfera dove il mondo è racchiuso…*

Supporrò inoltre che, in un siffatto mondo, tutti i corpi abbiano lo stesso coefficiente di dilatazione, in maniera che la lunghezza di un regolo qualunque sia proporzionale alla sua temperatura assoluta; e infine un oggetto trasportato da un punto all'altro, la cui temperatura sia differente, si metta immediatamente in equilibrio termico con il nuovo ambiente…

Un oggetto mobile diverrà allora via via più piccolo man mano che si avvicinerà alla sfera limite.… se questo mondo è limitato dal punto di vista della nostra geometria abituale, sembrerà però infinito ai suoi abitanti. Quando questi, in effetti, vogliono avvicinarsi alla sfera limite, si raffreddano e diventano via via più piccoli, sì che essi non possono mai raggiungere la sfera limite…"

La sfera limite di cui **Poincaré** parla nell'estratto precedente, rappresenterà pertanto, per gli abitanti dello *strano mondo* che essa racchiude, l'infinito.

Il *modello di Poincaré per la geometria iperbolica* è un cerchio $\mathcal{C}$ di centro **O** e raggio **r**: (in qualche modo, la sezione del mondo sferico precedente) che, pur essendo limitato "dal di fuori", al suo "interno" rappresenta un piano infinito.

Com'è possibile? Per capirlo servono alcuni passi: innanzitutto definire quali sono le **rette** in questo piano, e poi come è definito il concetto di **distanza** tra due punti.

DEF1 In tale "piano" le "**rette**" corrispondono a diametri o ad archi di circonferenze ortogonali alla circonferenza che delimita $\mathcal{C}$ (le tangenti nel punto d'intersezione sono ortogonali).

DEF2 Definiamo infatti la **distanza** fra i punti P e Q della **figura 22** nel modo seguente:

$$d(P;Q) = \left| \ln \frac{\overline{PB} \cdot \overline{QA}}{\overline{PA} \cdot \overline{QB}} \right| \qquad \text{si avrà:} \qquad \lim_{P \to A} \left| \ln \frac{\overline{PB} \cdot \overline{QA}}{\overline{PA} \cdot \overline{QB}} \right| = \infty$$ perciò le

porzioni di corda segmenti **PA** e **QB** saranno "semirette", in questo modello!

[3] Coxeter H. S. M., 1957, Non-Euclidean Geometry, Toronto, University of Toronto Press

e anche: $\lim_{P\to Q} |\ln \frac{\overline{PB}\cdot\overline{QA}}{\overline{PA}\cdot\overline{QB}}| = |\ln \frac{\overline{QB}\cdot\overline{QA}}{\overline{QA}\cdot\overline{QB}}| = \ln 1 = 0$, come ci si aspetta...

La circonferenza che delimita il cerchio $\mathcal{C}$, rappresenta dunque in tale modello, appunto, **l'infinito**. Un infinito che sta lì: proprio sotto i nostri occhi...

Le proprietà della geometria iperbolica sono ricche, stupefacenti e complesse. Vi segnalo un applet che vi consente di visualizzarne caratteristiche e "funzionamento": http://progettomatematica.dm.unibo.it/NonEuclidea/File/applet%20Non%20Euclid.htm .

Molte e affascinanti sono le caratteristiche peculiari della geometria iperbolica; in particolare quelle che la distinguono dalla geometria euclidea.

Ma per tornare alla nostra ricerca di immagini dell'infinito, vediamo che succede provando a tassellare un piano di Poincaré, cioè a ricoprirlo con figure tutte aventi la stessa area. Per fare una tassellazione, magari partendo da una figura, è importante stabilire come si fa a ribaltare quella figura ruotandola attorno ad un suo lato. In termini tecnici: la simmetria assiale.

DEF3 All'interno di tale modello la simmetria assiale, indovinate un po'? Si fa tramite **inversione circolare**!

In **figura 23** viene mostrato cosa accade utilizzando triangoli equilateri...

Capite ora perché questa nuova geometria ha a che fare con le immagini dell'infinito? E capite perché le cose vanno come vedete in figura?

In **figura 24** una tassellazione mediante quadrati...

E, dulcis in fundo, ecco in **figura 25**, cosa si può combinare utilizzando ***angeli e demoni*** [Escher combina una *tassellazione* per esagoni ad una per rettangoli ottenendo uno dei suoi famosi circle: "angels and devils"]!

Conclusioni provvisorie

Abbiamo sorvolato su diverse visioni d'infinito:

- l'**infinito attuale** "per definizione" della **prospettiva**;
- il doppio infinito della **spirale logaritmica**: il polo (infinitamente piccolo), effetto ottico di un infinito attuale "alla BMI" (cfr pag. 1) e l'infinitamente grande dell'avvolgersi infinito delle sue spire e dell'avvolgersi fino all'infinito delle stesse (una quantità infinita di spire che si avvolgono fino all'infinito);
- l'**inversione circolare** che consente giochi di trasformazione reciproca tra infinito e finito e fra i due differenti tipi d'infinito precedentemente individuati;
- il **modello della geometria iperbolica di Poincaré** che rende visibile in maniera emblematica il processo che, secondo la BMI, funge da liaison fra infinito potenziale (il processo del tassellare che non ha mai fine) e infinito attuale (il cerchio limite che è il lugo dove risiede l'infinito del modello: è infinito attuale!).

La geometria consente di affrontare ciascuna di queste concezioni d'infinito mediante un approccio cognitivo pre-evidente: più o meno immediato, più o meno formalizzabile.

La possibilità di "vedere" offerta da questi esempi geometrici ha i suoi vantaggi ma anche le sue "insidie": ad esempio l'occhio-cervello registra in maniera corretta, anche se non può immaginare la raffinatezza matematica che lo regola, il modello di Poincaré, ma può trovarsi spiazzato di fronte ad alcune costruzioni prospettiche che possono risultare anche molto articolate, o anche ingannato, come nel caso del polo della spirale logaritmica.

I pro e i contro dell'utilizzo delle immagini nella comprensione dei concetti, che si tratti di didattica come di divulgazione, non possono non presentarsi in quest'ambito in cui con concetti, quindi con immagini, così significative, ci si va a confrontare.

Cenni storici e piccolo approfondimento sulle geometrie non euclidee

Ma a questo punto forse sarete curiose/i di sapere come nascono le geometrie non euclidee. E quali altre ce ne sono, oltre a quella iperbolica - della quale abbiamo visto in azione un modello possibile. Per rispondere a questa ragionevole curiosità, dobbiamo tornare un po' indietro nel tempo: al III secolo a.C., ad Alessandria d'Egitto.

Una tipica espressione dell'*horror infiniti* infatti è il sospetto con il quale il matematico greco **Euclide** (III secolo a.C., Alessandria) guarda al quinto dei postulati della sua opera, gli *Elementi*.

Il **quinto postulato** afferma l'unicità della parallela condotta per un punto esterno a una retta data.

È evidente che la comprensione di tale postulato richiede un ragionamento all'infinito e per tale motivo Euclide e i matematici che studiarono la sua opera, per duemila anni cercarono di dimostrare il postulato o di sostituirlo con proposizioni più evidenti, proprio per evitare il ricorso all'infinito.

Ma c'è anche l'idea che i postulati debbano essere verità evidenti e semplici, mentre questo postulato è così articolato... Nei secooli si sprecarono quindi i tentativi di ricavare il quinto postulato dai primi quattro; di dimostrarlo, quindi. E, fra le altre, non potevano mancare le dimostrazioni "per assurdo": negando il quinto postulato, si sarebbe dovuti incappare in un'incoerenza talmente profonda da minare l'intera geometria euclidea, si pensava.

E invece si finì per "scoprire" (o inventare, a seconda della vostra posizione filosofia nei confronti della matematica) altre geometrie. Geometrie in cui, dato un punto **P**, esterno ad una retta **AB**, per questo passano infinite rette parallele alla prima (come nella **geometria iperbolica**, appunto: vedi **figura 26**: infinite rette passanti per **P** "s'incontrano all'infinito") o non ne passa nessuna, come nella **geometria ellittica**: **figura 27**.

Stranissima la questione della geometria ellittica: va bene che si è ritenuto per secoli che la Terra fosse piatta, ma come non pensare a una geometria che avesse per protagonista una superficie sferica, invece di un misteriosissimo piano infinito, una volta dimostrata la sfericità della Terra? Eppure le geometrie non euclidee ebbero lo status di geometrie riconosciute dalla comunità scientifica solo nei primi anni del 1800!

E il modello della geometria ellittica è anche molto più semplice di quello della geometria iperbolica (almeno parlandone in maniera superficiale come stiamo facendo oggi...): una sfera in cui le rette siano i meridiani...