Traslazioni

Le **traslazioni** sono *trasformazioni* che, come le simmetrie e le rotazioni, lasciano invariate le distanze e le ampiezze degli angoli e pertanto fanno parte della famiglia delle "isometrie".

Nel piano cartesiano può essere utile **traslare curve**, o figure, o configurazioni di curve e figure, per "semplificare" la situazione (ad esempio le equazioni rappresentative o i "conti") o per passare, nello studio delle stesse, dai casi particolari ai casi generali.

Avendo sottolineato come l'equazione di una curva "racconti" la relazione fra le coordinate (ascisse e ordinate) di **ciascun** punto della curva (e di tutti i suoi punti contemporaneamente), per spiegare in che modo traslare una curva sarà necessario e sufficiente spiegare come effettuare la **traslazione di un punto**.

Per far questo si possone seguire due tipi di approccio:

1) PROPOSTA DEL LIBRO: applicare la traslazione al punto "direttamente" attraverso un vettore (***a*** ; ***b***) (***a***, ***b*** *numeri reali*[1]) applicato in **P**. Il punto **P** (x,y) va a finire in ***P'*** (x+***a***, y+***b***).

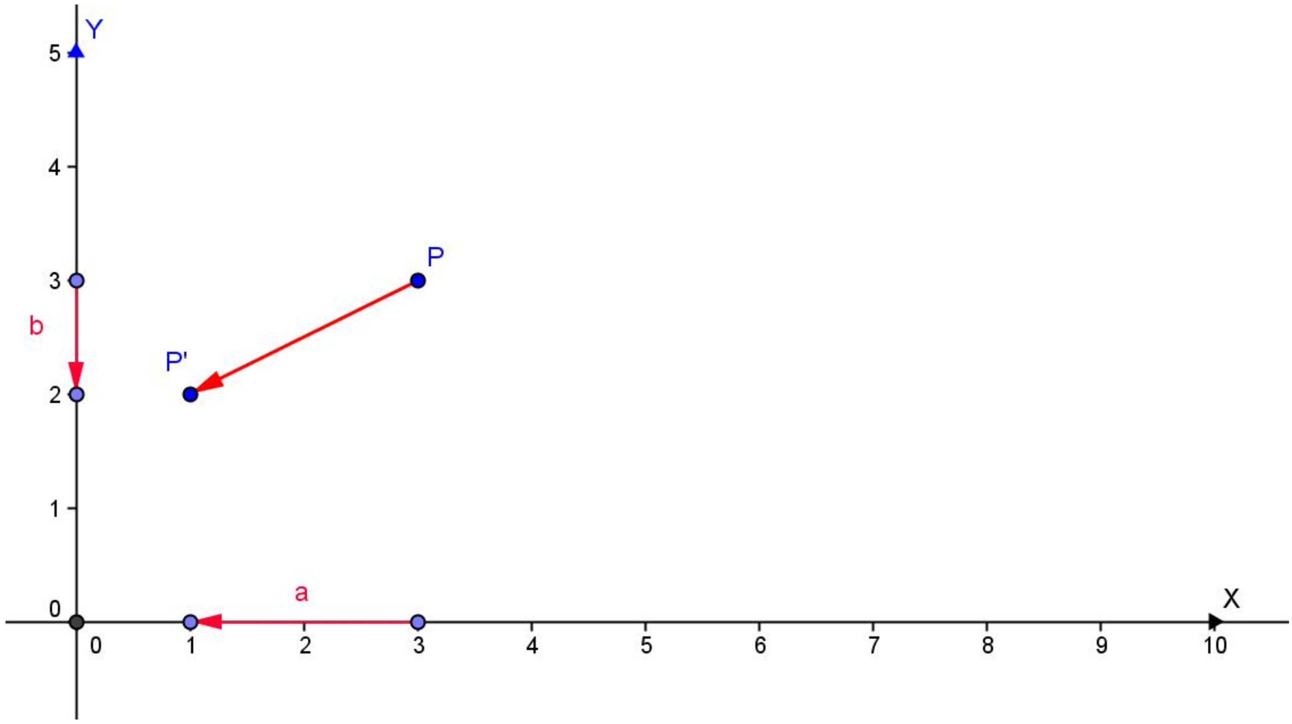
N.B. Ci stiamo mettendo dal punto di vista di chi mantiene fisso il Sistema di Riferimento (d'ora innanzi SdR), ossia puoi immaginare che tutti i punti del piano effettivamente si spostino, assi compresi, ma che sia (contemporaneamente) anche possibile mantenere i vecchi assi fissi.

In questo modo abbiamo la possibilità di valutare come cambiano le coordinate dei punti dal "vecchio" sistema di riferimento al "nuovo" (i due sistemi "coincidono" dal punto di vista "visivo").

Così il punto **P**, che prima della trasformazione, ha coordinate (x, y) in xOy,

dopo la trasformazione, ha coordinate (x+***a***, y+***b***) in xOy e (x', y') in x'O'y'.

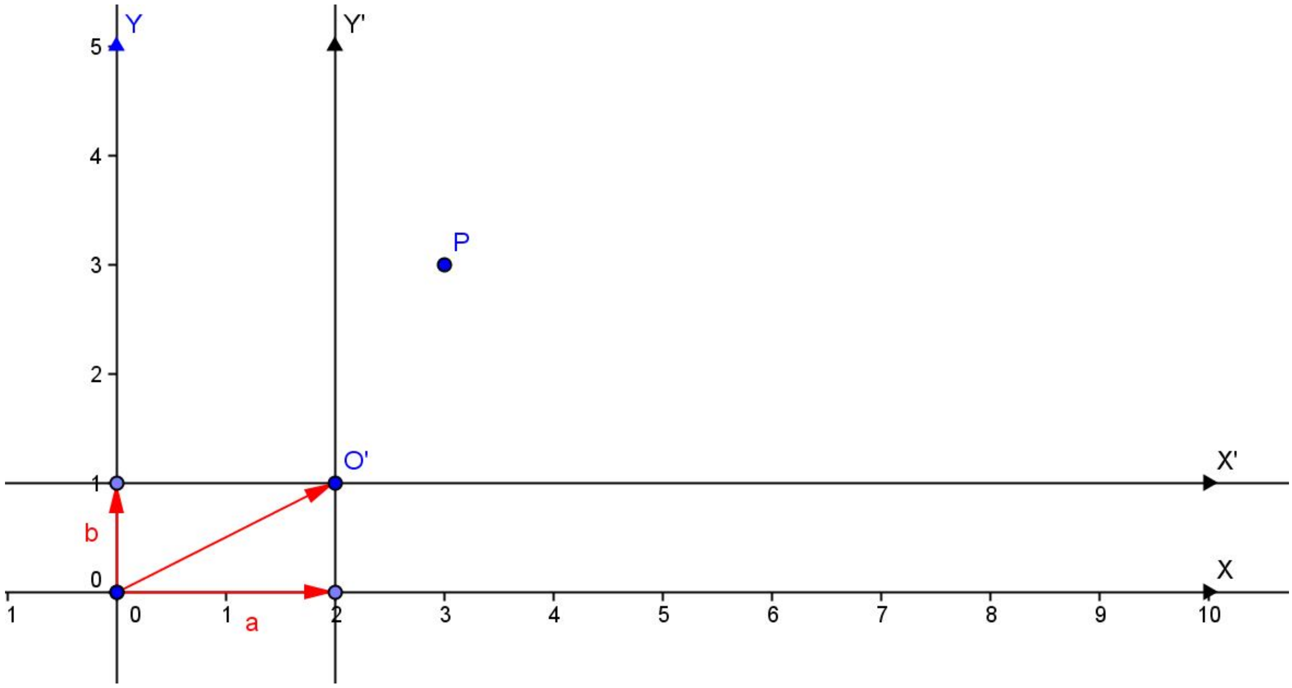
M1) Da cui ottengo: $x' = x + \boldsymbol{a}$; $y' = y + \boldsymbol{b}$ (specularmente: $x = x' - \boldsymbol{a}$; $y = y' - \boldsymbol{b}$).



[1] Capirete come mai ho scelto di posizionare il vettore (a ; b) in questo modo apparentemente bislacco solo alla pagina successiva. Comunque non vi fa male sottolineare il fatto che una lettera, se fa le veci di un numreo reale, potrebbe essere "occupata" da numeri anche negativil frazionari, radici, ecc...

2) PROPOSTA MIA: considero un punto **P** del piano. Inserisco sul piano due SdR: xOy e x'O'y' traslati l'uno rispetto all'altro di un vettore (***a, b***). Se in *xOy* il punto **P** ha coordinate (*x,y*) e in *x'O'y'* il punto[2] **P** ha coordinate (*x';y'*) , qual'è la relazione tra *x* e *x*' e tra *y* e *y*'? Osservando il disegno diremmo:

M2) $x' = x - \boldsymbol{a}$; $y' = y - \boldsymbol{b}$ (specularmente: $x = x' + \boldsymbol{a}$; $y = y' + \boldsymbol{b}$) .



Ma come! Le equazioni delle traslazioni ottenute nel metodo 1 o nel metodo 2 sono differenti fra loro?!?

Eppure in entrambi i casi, riferendoci all'esempio numerico scelto, il punto **P** ha coordinate (3;3) in xOy e coordinate (1;2) in x'Oy'!

Confronto fra i metodi 1 e 2

I punti di vista sopra citati (1) e (2) sono due punti di vista differenti, entrambi accettabili, e che per gli aspetti pratici poi portano agli stessi risultati.

Nel **metodo 1)** traslando il punto, aggiungo (algebricamente) alle coordinate di **P** in xOy le componenti del vettore-traslazione (nell'esempio erano infatti ***a*** = -2 e ***b*** = -1).

Nel **metodo 2** "avvicinare" il SdR al punto **P** significa "diminuire" le coordinate del punto stesso e viceversa "allontanare" il SdR dal punto **P** significa "aumentare" le coordinate del punto **P**. Perciò sottraggo algebricamente alle coordinate del punto **P** le componenti del vettore traslazione!

Entrambi i sistemi hanno dei pro e dei contro: nel **metodo 1** si opera direttamente sulle coordinate ma non si "vede" il "nuovo" SdR. Nel **metodo 2** i SdR "vecchio" e nuovo" sono ben distinti ma si opera in maniera controintuitiva sulle coordinate.

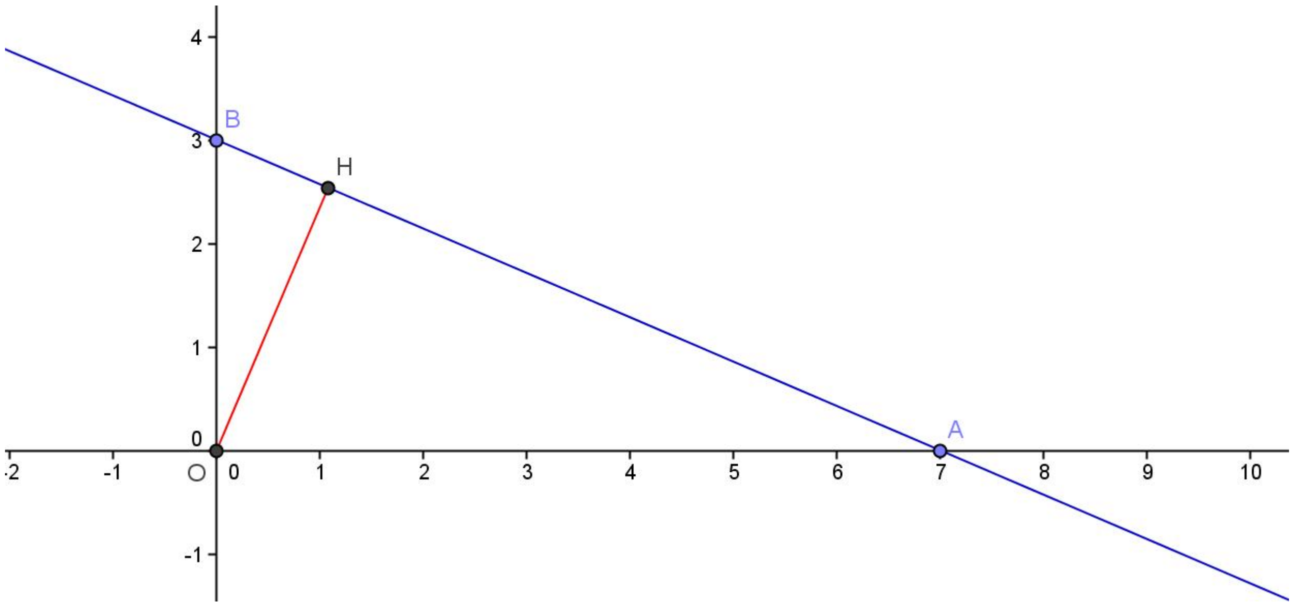
Scegli pure il metodo che preferisci, purché ti sia chiaro concettualmente e di facile applicazione negli esercizi.

Abbiamo già visto insieme esempi di applicazione del metodo delle traslazioni del SdR: **l'equazione di una parabola**; **l'equazione della circonferenza.**

[2] **P** dovrebbe cambiare nome in **P'**, ma se prima coincidevano xOy e x'O'y', ora coincidono P e P'!

Rivediamo insieme la dimostrazione della **“formula” della distanza punto retta** e una conseguenza: **l’equazione della bisettrice** dell’angolo di cui si conoscano le equazioni dei lati.

Dimostrazione della “formula” della distanza punto retta



1) Come abbiamo già visto la dimostrazione parte dal considerare un caso particolare: il caso in cui la distanza viene calcolata fra il punto speciale: **O**(0;0) e una retta ***r*** in posizione generica[3], quindi di equazione $y = \mathbf{m}\, x + \mathbf{t_n}$ (utilizzo questa notazione non usuale per il termine noto per non creare confusione con il caso generale).

La distanza fra **O** e ***r*** è la misura del segmento **OH**. Questo segmento “lo posso vedere come” <u>altezza relativa all’ipotenusa **AB** del triangolo **AOB**</u>, rettangolo in **O**.

La relazione più semplice in cui è coinvolta la misura di **OH** è l’area del triangolo **AOB**.

A_{AOB}= (AB OH)/2 ma anche A_{AOB}= (OB OA)/2.

Per la **proprietà transitiva** dell’uguaglianza si ha dunque: (AB OH)/2 = (OB OA)/2 .

Per la **proprietà invariantiva**: **OH**= (**OB OA**)/**AB**

Andiamo a vedere ora in che modo si può “interpretare” dal punto di vista della **geometria analitica** la relazione ora trovata.

OB = $|\mathbf{t_n}|$; **OA** = $|-\mathbf{t_n}/m|$;

(**notazioni**: “√ (qcs)” **:** qcs fra parentesi è tutto sotto radice)

AB=√ (OA^2+OB^2)=√ $(\mathbf{t_n}^2+(\mathbf{t_n}/m)^2)$=√ $(\mathbf{t_n}^2\, m^2 + \mathbf{t_n}^2)\boldsymbol{/}m^2$ =√ $\mathbf{t_n}^2/m^2\, (m^2+1)$=$|\mathbf{t_n}/m|$ √ (m^2+1)

Da cui deriva: **OH** = ***d(P ; r)*** = $(|\mathbf{t_n}|\,|-\mathbf{t_n}/m|)\boldsymbol{/}(|\mathbf{t_n}/m|$ √ $(m^2+1))$ = $|\mathbf{t_n}|$ **/** √ (m^2+1)

(Finché non reperisco un nuovo software per scrivere formule vi toccherà farvi i conti per bene da sole/i e non vi farà certo male...)

PR1)	Quindi **sse P≡O**	d(**P** ; **r**) = $|\mathbf{t_n}|$ **/** √ $(\mathbf{m}^2+1)$

2) Andiamo a considerare il caso in cui **P** $(x_0\, ;\, y_0)$; ***r*** : $y = \mathbf{m}\, x + \mathbf{q}$

Effettuo una traslazione del sistema di riferimento xOy (**metodo 2**) in modo che il centro di x’O’y’ coincida con **P** (che perciò in xOy aveva coordinate $(x_0\, ;\, y_0)$ e in x’O’y’ (0;0)) ;

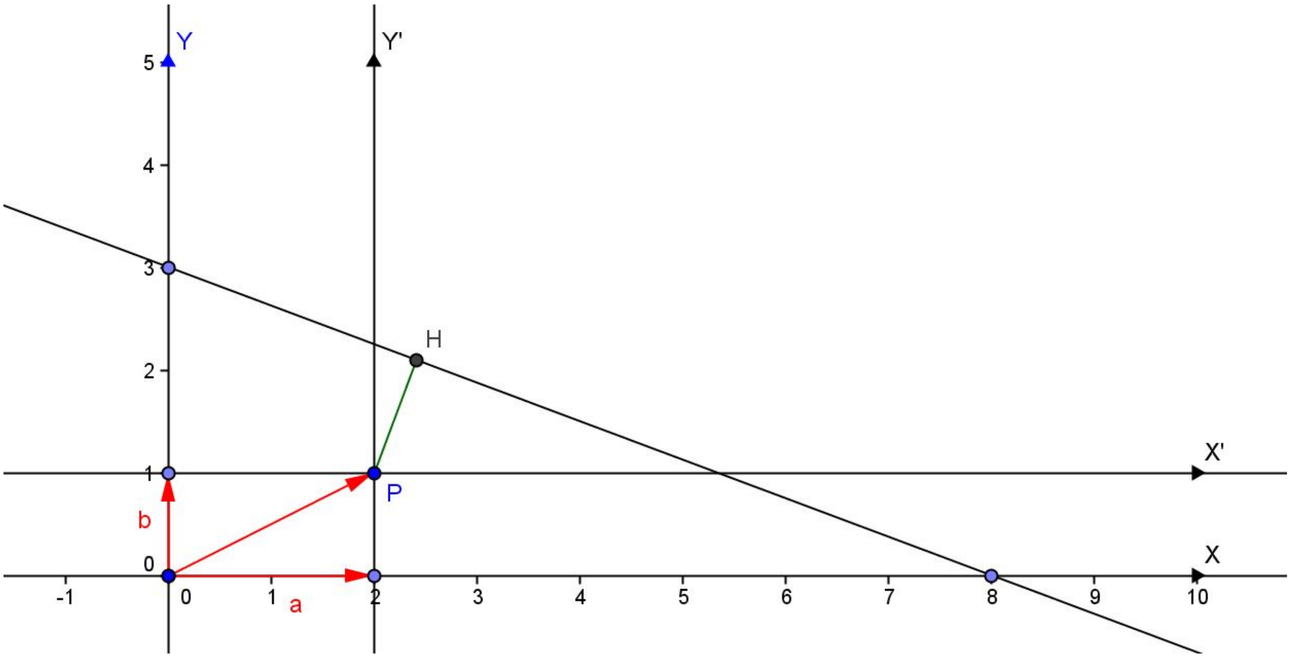
---

[3] Come si otterrà la distanza fra un punto e una retta paralla ad uno degli assi?

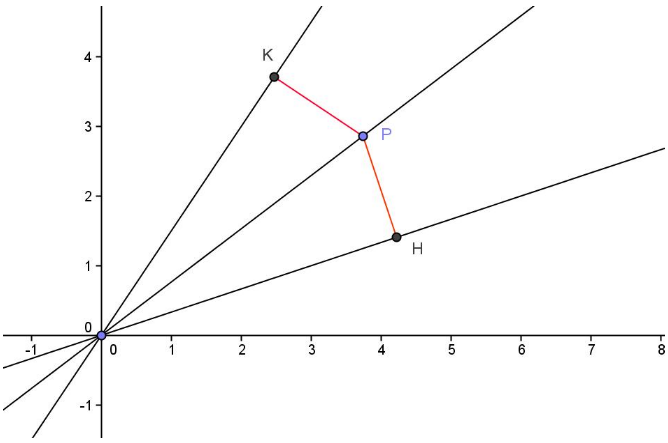
L'equazione di **r** nel nuovo sistema sarà: $y'+y_0=\boldsymbol{m}\,(x'+x_0)+\boldsymbol{q}$ cioè: $y'=\boldsymbol{m}\,x'+\boldsymbol{m}\,x_0+\boldsymbol{q}-y_0$

Mi sono ricondotta al caso **1)** in cui P≡O , perciò posso utilizzare la relazione trovata facendo attenzione a porre al posto del modulo di $\mathbf{t_n}$, il termine noto dell'equazione della retta che ora è: $\boldsymbol{m}\,x_0+\boldsymbol{q}-y_0$

PR2) Quindi, in generale**:** $d(\mathbf{P}\,;\,\mathbf{r}) = |\boldsymbol{m}\,x_0+\boldsymbol{q}-y_0| \,/\, \sqrt{(\mathbf{m}^2+1)}$



Bisettrice di un angolo



Nella geometria euclidea, la **retta bisettrice** si può caratterizzare anche come il **luogo** dei punti del piano equidistanti da una coppia di rette. Se queste sono incidenti, si hanno due bisettrici perpendicolari fra loro; se, invece, sono parallele, si avrà allora un'unica bisettrice anch'essa parallela alle due e ivi compresa a metà strada.

Partiamo al solito da un caso particolare: determiniamo l'equazione delle bisettrici di un angolo i cui lati siano rette passanti per l'origine **O** del SdR.

Per non complicare il disegno rappresento solo una delle due bisettrici.

Le equazioni dei lati sono del tipo: $y=\boldsymbol{m}\,x$ e $y=\boldsymbol{m'}\,x$. Con $\boldsymbol{m}<\boldsymbol{m'}$ **.** E anche l'equazione della bisettrice sarà del tipo $y=\boldsymbol{b}\,x$. Con $\boldsymbol{m}<\boldsymbol{b}<\boldsymbol{m'}$, Perciò un punto generico **P** della bisettrice avrà coordinate $(x_0;\ \boldsymbol{b}\ x_0)$. Applicando la definizione come luogo sarà: **PH**=**PK** per ogni punto **P** della bisettrice, cioè, applicando la formula della distanza punto retta:

$$|\boldsymbol{m}\,x_0+\boldsymbol{b}\,x_0| \,/\, \sqrt{(\mathbf{m}^2+1)} = |\boldsymbol{m'}\,x_0+\boldsymbol{b}\,x_0| \,/\, \sqrt{(\mathbf{m'}^2+1)}$$

Che, raccogliendo e semplificando x_0 diventa: $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{b}| \,/\, \sqrt{(\mathbf{m}^2+1)} = |\boldsymbol{m'}+\boldsymbol{b}| \,/\, \sqrt{(\mathbf{m'}^2+1)}$

Che conduce a due equazioni in **b** (una considerando i moduli concordi e l'altra discordi), le cui soluzioni danno le pendenze delle due bisettrici cercate. A te **generalizzare**!