Esploriamo la parabola con *asse* parallelo all'*ady* o all'*adx*

I) Parabola con vertice nell'origine degli assi cartesiani

$y = x^2$ è l'equazione rappresentativa "più semplice" di una **parabola *P*** (con *asse parallelo all'asse x*, capirai fra poco cosa significa). Per disegnarne il ***grafico*** con il "metodo della tabella" attribuisci valori alle *x* e calcola le *y* corrispondenti. ES:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
$y = x^2$	0	1	1	4	4	9	9

Riportando su un grafico le coppie di punti (*x;y*) [(0;0), (1;1), (-1;1), ...] scopri che:

1. Il punto (0;0) è un punto *di minimo:* non vi sono punti con ordinate minori

2. Le ordinate dei punti della parabola (*y**P***) sono tutte *positive* ($\forall x \in \Re, y_P \geq 0$)

3. La parabola è *simmetrica* rispetto all'*ady*[1]

4. I **rami** della parabola (le due parti di ***P*** simmetriche rispetto *ady*) vanno all'*infinito (+∞)*

Se ora provi a disegnare la parabola ***P'*** di equazione: $y = -x^2$ scopri che:

1'. Il punto (0;0) è un punto *di massimo:* non vi sono punti con ordinate maggiori

2'. Le ordinate dei punti della parabola (*y**P'***) sono tutte *negative* ($\forall x \in \Re, y_{P'} \leq 0$);

3'. La parabola è *simmetrica* rispetto all'*ady*

4'. I **rami** della parabola vanno all'*infinito (negativo questa volta: -∞)*

✘ Quindi il segno del coefficiente di x^2 determina l'*orientamento* della parabola: se è positivo la parabola ha concavità verso l'alto e se è negativo ha concavità verso il basso

✘ Il punto di minimo/di massimo, si chiama **VERTICE** della parabola e si indica con: **V**

✘ Una parabola è una curva **simmetrica** rispetto ad una retta[2] "speciale" passante per il **vertice**. Noi studieremo solo i casi in cui questa retta sia parallela all'*ady* (o all'*adx)*[3]. Tale retta si chiama **asse della parabola**.

Se il coefficiente di x^2 è *positivo* ed è compreso fra 1 va verso lo 0 la parabola va "aprendosi" mentre se da 1 cresce "verso l'infinito", la parabola va "stringendosi". Indicato con la lettera ***a*** tale coefficiente possiamo riassumere tutto ciò nello schema seguente:

<table>
<tr><td rowspan="2">a>0</td><td>$a \to 0 \Rightarrow P \to adx$</td><td rowspan="4">Dove: P indica la parabola, le frecce magre indicano il verbo "tendere"; le frecce ciccione indicano l'implicazione logica (si leggono: "allora"); ∞ è il simbolo dell'infinito (il segno davanti va interpretato come normalmente in algebra); ady^+ indica il semiasse positivo delle y e ady^- indica il semiasse negativo delle y.</td></tr>
<tr><td>$a \to +\infty \Rightarrow P \to ady^+$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a<0</td><td>$a \to 0 \Rightarrow P \to adx$</td></tr>
<tr><td>$a \to -\infty \Rightarrow p \to ady^-$</td></tr>
</table>

---

[1] Se riesci ad immaginare di piegare in due il piano cartesiano, lungo l'*ady*, dovresti *vedere* che le due parti del grafico di ***P*** - che si trovano nei due semipiani che portiamo a sovrapporsi - coinciderebbero punto per punto.

[2] Condizione necessaria e sufficiente (CNS oppure Se e solo se, abbreviato in SSE) affinché una **curva** sia **simmetrica rispetto ad una retta** è che ciascuna coppia di punti della curva che siano estremi di un segmento ortogonale a tale retta siano anche equidistanti da questa.

[3] E' simmetrica rispetto alla bisettrice di I e III quadrante della parabola con asse parallelo all'ady quindi ha equazione: $x = a \cdot y^2$

- Intersezione con *ady*, intersezioni con *adx* e vertice coincidono nel punto **O**(0;0).
- La parabola è tangente all'*adx* nel punto **O**.

E così si conclude la trattazione del caso "parabola con **vertice** nell'**origine** degli assi e asse parallelo all'*ady*". Cioè il caso corrispondente all'equazione: $y = a \cdot x^2$.

II) parabola con vertice sull'asse delle *ordinate* (*ady*), ma non in O

Proviamo a modificare un po' l'equazione e vediamo che succede al grafico. Assunta come ipotesi di lavoro (da verificare in seguito) che il coefficiente ***a*** influisce <u>solo e unicamente su</u> <u>*orientamento* e *apertura*</u>, fissiamo ***a***=1

Disegna i grafici delle parabole di equazione $y = x^2 + 3$ e $y = x^2 - 3$, come puoi vedere dal tuo disegno, mantengono quel che il titolo promette: hanno vertice sull'*ady.*

- La parabola di equazione $y = x^2 + 3$ <u>non</u> ha intersezioni con l'*adx*
- La parabola di equazione $y = x^2 - 3$ ha intersezioni reali distinte con *l'adx* le cui ascisse otterrai risolvendo l'equazione: $x^2 - 3 = 0$ Cerchi infatti quei punti della parabola che hanno **ordinata 0**, e per trovarli dovrai sostituire ad *y* il valore 0: ricorda infatti cosa asserisce quello che abbiamo chiamato "*Principio fondamentale della geometria analitica*".

I valori delle *x* che sono soluzioni di $x^2 - 3 = 0$ sono proprio le **ascisse dei punti che hanno ordinata 0**, cioè le ascisse dei punti d'intersezione con l'*adx*).Soluzioni:: $x_1 = +\sqrt{3}$ e $x_2 = -\sqrt{3}$

Per *stimare* la posizione di tali intersezioni si osserva che: $\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$, cioè: $1 < \sqrt{3} < 2$.

- L'intersezione con l'*ady* coincide con il vertice e si trova nel punto (0;y_V).
- Le intersezioni con l'*adx* sono: $\pm\sqrt{-\frac{y_v}{a}}$ quindi sono reali sse (se e solo se): $\frac{y_V}{a} < 0$.
- E così si conclude il caso della **parabola con vertice sull'asse delle *ordinate* (*ady*)**, cioè il caso corrispondente all'equazione generale: $y = a \cdot x^2 + y_V$

III) parabola con vertice sull'asse delle *ascisse* (*adx*) ma non in O

Questa volta aggiungiamo algebricamente un numero ad *x* prima di elevarlo al quadrato. Lasciamo sempre ***a***=1. Disegna le parabole di equazione: $y = (x+3)^2$ e $y = (x-3)^2$ Tali parabole, come puoi vedere dal tuo disegno, mantengono quel che il titolo promette: hanno vertice sull'*adx*: sono **tangenti** all'*adx* nel vertice (le due intersezioni con l'*adx* coincidono fra loro e con il vertice). A differenza che nel **I** caso il vertice non è in **O**.

L'unica particolarità da rilevare è che, per avere le coordinate del vertice, nonché dei punti di tangenza, bisogna prendere l'**opposto** del *termine addizionato* ad *x*![4]

Il caso **parabola con vertice sull'asse delle *ascisse* (*adx*) ma non in O**, cioè il caso corrispondente all'equazione: $y = a \cdot (x - x_v)^2$, finisce qui: V(x_V;0) e $\cap\, ady = (0; a \cdot x_V{}^2)$

IV) parabola con vertice in un qualunque punto interno al piano

Inserendo contemporaneamente le *perturbazioni* dei casi **II** e **III**, avremo il caso più generale: $y = a \cdot (x - x_V)^2 + y_V$ che si ottiene dalla parabola con vertice in **O** mediante una ***traslazione*** (cfr file dedicato) che porti il vertice nel punto di coordinate $V(x_V; y_V)$

---

[4] Nel **II** caso abbiamo <u>aggiunto</u> algebricamente un numero al termine ax^2 ottenendo una <u>traslazione lungo *l'ady*</u>, mentre adesso <u>togliamo</u> algebricamente un numero al termine *x* e otteniamo una <u>traslazione lungo l'*adx*</u>. Sembra così esserci una *strana asimmetria! Ma* basta scrivere: $y - y_V = a \cdot x^2$ invece che $y = a \cdot x^2 + y_V$ e ecco che l'apparente asimmetria scompare! Cairai meglio più avanti..

- Per avere le ***intersezioni*** con *l'adx*, quindi le soluzioni dell'equazione $a \cdot (x - x_V)^2 + y_V = 0$ Faccio i seguenti passaggi:

$$(x - x_V)^2 = -\frac{y_V}{a} \qquad x - x_V = \pm\sqrt{-\frac{y_V}{a}} \qquad x_{1,2} = x_V \pm \sqrt{-\frac{y_V}{a}}$$

- Per ottenere ***l'intersezione*** con l'*ady* al solito per ottenerla devi sostituire il valore 0 al posto di *x*. Fatti i conti. Ti deve venire: $a \cdot x_V{}^2 + y_V$!

La parabola di equazione canonica e la sistematizzazione definitiva

Nelle pagine precedenti abbiamo *giocato* con la parabola per cercare di comprendere le relazioni fra la sua posizione nel piano e le caratteristiche dell'equazione rappresentativa.

Per far questo ci siamo serviti di un'equazione particolare nella quale erano sempre ben visibili le coordinate del vertice, ma che non è l'equazione utilizzata comunemente. Quest'ultima, detta anche ***equazione canonica***, è scritta nella forma: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

a, ***b*** e ***c*** sono ***parametri*** sostituendo ai quali, di volta in volta, *valori numerici specifici* modifichiamo **orientamento**, **apertura** e **posizione** della parabola nel piano cartesiano.

Andiamo a scoprire regole di carattere generale su tali parametri. Cioè andiamo a ritrovare in questa equazione "ufficiale" le scoperte fatte sinora.

Per far questo ci serve il **principio** d'**identità dei polinomi**: *due polinomi di grado **n** sono uguali **sse** ciascun coefficiente relativo alla variabile di grado **k** del primo polinomio è uguale al coefficiente della variabile di grado **k** nel secondo polinomio con:* $0 \le k \le n$.

Andiamo quindi a confrontare i coefficienti delle nostre due equazioni.

$y = a \cdot (x - x_V)^2 + y_V = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x_V \cdot x + a \cdot x_V{}^2 + y_V$ e: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

- ***a*** è in entrambi coefficiente di x^2 e non è un caso se l'ho scelta in questo modo!
- Uguagliando i *coefficienti di x* si ha: $-2 \cdot a \cdot x_V = b$ quindi: $x_V = -\dfrac{b}{2 \cdot a}$: l'*ascissa del vertice*.
- E uguagliando i termini noti si ha l'*ordinata del vertice*, infatti: $a \cdot x_V{}^2 + y_V = c \Leftrightarrow$

$$a \cdot (-\frac{b}{2a})^2 + y_V = c \Leftrightarrow \frac{b^2}{4a} + y_V = c \Leftrightarrow y_V = \frac{4ac - b^2}{4a} \Leftrightarrow y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

- Per le intersezioni con l'*adx* la relazione da considerare è: $x_{1,2} = x_V \pm \sqrt{-\dfrac{y_V}{a}}$. Sostituiamo alle coordinate del vertice le relazioni fra i coefficienti dell'equazione canonica individuati:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\left(-\frac{\Delta}{4a} \cdot \frac{1}{a}\right)} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{con} \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Cogliamo subito l'occasione per osservare che, se $b = 2 \cdot \beta$ (cioè: $\beta = \frac{b}{2}$), la formula diviene:

$$\frac{-2\beta \pm \sqrt{(2\beta)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\beta \pm 2\sqrt{\beta - ac}}{2a} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a} \quad \text{con: } \beta^2 - ac = \frac{\Delta}{4}$$

- La parabola avrà intersezioni con l'*adx* **sse** $\Delta \ge 0$. Per $\Delta = 0$ tali intersezioni saranno coincidenti (parabola tangente all'*adx*) e per $\Delta > 0$ tali intersezioni saranno distinte.
- L'intersezione con l'*ady* <u>esiste sempre</u> (ma può valere 0) ed è dato da **c**.

✘ Se ***c*=*0*** la parabola presenta una risoluzione semplificata in quanto $\cap ady \equiv adx_1 \equiv 0$ e, $ax^2+bx=0$ ha, oltre alla soluzione 0, la soluzione: $x_2=-\frac{b}{a}$ che è il doppio di x_V.

Rivediamo alla luce degli ultimi risultati i quattro casi di posizione della parabola

I) parabola con vertice nell'origine degli assi cartesiani IDENTICO

II) parabola con vertice sull'asse delle *ordinate* (*ady*). L'equazione canonica è: $y=a\cdot x^2+c$. **V**(0;***c***) .- L'intersezione con *ady* è (o;***c***) e le intersezioni con l'*adx* sono reali sse ***a·c<0*** infatti è: $x_{1,2} \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

III) parabola con vertice sull'asse delle *ascisse* (*adx*) ma non in O. L'equazione canonica è del tipo: $y=a\cdot x^2-2\cdot a\cdot x_V+a\cdot x_V{}^2$ solo così è infatti riconducibile a quanto abbiamo visto e cioè: $y=a\cdot(x-x_v)^2$. Spesso tale forma non è immediatamente individuabile ma puoi avere certezza che sia presente, anche se camuffata, se ottieni Δ=0 al momento di calcolarti l'ordinata di **V** o le intersezioni con l'asse *x*!

IV) parabola con vertice nel piano. $V(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a})$; $\cap adx=c$; $\cap adx_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ o con la formula ridotta se ***b*** è pari. All'interno di questo caso è contenuto il caso ***c*=*0*** che ho trattato nella pag. precedente.

Per un grafico dignitoso

✘ Ricorda che il **numero di punti minimo** da trovare è 5, se **V** e le intersezioni con *adx* sono "distanti fra loro", e 7 altrimenti.

✘ Per poter effettuare i conti necessari ad utilizzare il **metodo della tabella** ti conviene scrivere l'equazione nella forma: $y=a\cdot(x-x_V)^2+y_V$

✘ La scelta **dell'unità di misura** (udm) è FONDAMENTALE: la migliore è data dal m.c.m. fra i denominatori delle coordinate di **V** e delle intersezioni con *adx*, se sono razionali. Altrimenti dovrai regolarti tu di caso in caso, osservando i numeri che compaiono!

Schema generale riassuntivo dei casi possibili

Indicate con x_1 e x_2 le intersezioni con l'*adx* (CASELLE GRIGIE = CASI IMPOSSIBILI

	b*,*c*=*0	***b*=*0***	***c*=*0***	***a*, *b*, *c* ≠ *0***
Δ>0 $x_1\neq x_2$		sse ***a·c***<0	*x_1=0 e x_2=2x_V*	sse ***a·c***<0 ***o*** $b^2>a\cdot c$
Δ=0 $x_1\equiv x_2$	Vertice e intersezioni con gli assi coincidono in **O**			sse **quadrato binomio**
Δ<0 $x_1,x_2\notin\Re$.		sse ***a·c***>0		sse ***a·c***>0 ***e*** $b^2<a\cdot c$

Osserva come tale schema non tenga conto esplicitamente delle differenze fra i casi ***a>0*** e ***a<0***. Tali differenze sono comprese nella valutazione del segno del prodotto ***a·c***!

Nei libri viene sempre fornita la definizione di **parabola** come **luogo geometrico**. Lascio a te il divertente gioco di mettere in relazione quella definizione con quanto studiato sinora!