FRAZIONI E PERCENTUALI

Perché frazioni e percentuali? Perché, per esempio, altrimenti non si può tentare di comprendere un fenomeno complesso e importante come quello dell'**immigrazione**:

L'immigrazione in cifre

✘ Dal sito di **Repubblica** (03/12/2009)[1]: rapporto "Transatlantic Trends: Immigration" ...L'**81%** degli intervistati si dice più preoccupato dell'immigrazione "illegale", che di quella legale ...[*anche perché*] il **66%** degli Italiani [*adulti o tutti?* PROBLEMA: AVER CHIARO IL CAMPIONE DI RIFERIMENTO] pensa che nel nostro Paese ci siano più immigrati irregolari che regolari mentre è vero l'opposto:

✘ **Sky tg 24** (10/05/2010)[2]: "Secondo l'Ocse, l'Organizzazione per la cooperazione economica e lo sviluppo, in Italia il numero di immigrati clandestini, ..., oscilla tra i 500 e i 750 mila..." *Che percentuale rappresentano di tutti gli stranieri in Italia?* PROBLEMA: DATI UN TOTALE E UNA PARTE DEL TOTALE, DETERMINARE QUALE PERCENTUALE DEL TOTALE RAPPRESENTA LA PARTE.

✘ Dal Video Dossier Statistico Immigrazione **Caritas** - Migrantes (28/10/2009) realizzato da **Rainews24**[3]

✘ Stranieri "regolari" in Italia: circa 4.000.000 (Italiani all'estero circa 4.000.000). Popolazione italiana 60.000.000. *Che percentuale gli stranieri dell'intera popolazione?* PROBLEMA: DATI UN TOTALE E UNA PARTE DEL TOTALE, DETERMINARE QUALE PERCENTUALE DEL TOTALE RAPPRESENTA LA PARTE.

a. 1 su 8 neonati figli immigrati, 1 su 14 studenti. *Come si trasformano in che percentuali, e perché farlo?* PBL: TRASFORMARE FRAZIONI IN PERCENTUALI

b. 37.000 arrivi su barconi (50% dei quali richiedenti asilo): sono meno dell'1% degli immigrati complessivi! *Come si verifica che questa percentuale corrisponda ai dati forniti? Che percentuale degli irregolari arriva mediante i barconi? Si può dedurre dai dati sinora in nostro possesso [no: mancano i dati sugli ingressi annuali di immigranti "clandestini"]?* PBL: VERIFICA DATI FORNITI

✘ Voce "immigrazione clandestina" di **Wikipedia** (fonti del Ministero dell'Interno del 2006)[4]. SI trovano gli stessi dati su un articolo del **Sole 24 ore** del 1/04/09)[5]:

In Italia l'immigrazione clandestina è composta da (±3%):

60% circa di *overstayers*, tutti quegli stranieri che, entrati nel Paese regolarmente, restano dopo la scadenza del visto o dell'autorizzazione al soggiorno

25% circa giunge illegalmente da altri Paesi Schengen, approfittando dell'abolizione dei controlli alle frontiere interne

Soltanto il **15%** dell'immigrazione irregolare arriva dalle rotte del Mediterraneo.

*Se si stabilisce in una media di 20.000 di arrivi mediante barconi per anno, fra il 2004 e il 2008, a quanto ammonta, sempre in media, l'ingresso annuale di "clandestini? 20.000/15 * 100 = 133.333.* PROBLEMA: DALLA PERCENTUALE, E DAL DATO NUMERICO CORRISPONDENTE, RISALIRE ALL'INTERO.

---

[1] http://www.repubblica.it/2009/05/sezioni/cronaca/immigrati-8/rapporto-immigrazione/rapporto-immigrazione.html

[2] http://tg24.sky.it/tg24/cronaca/2010/05/10/stime_immigrati_irregolari_italia.html

[3] http://www.youtube.com/watch?v=EiYy4U17AWc&feature=player_embedded

[4] http://it.wikipedia.org/wiki/Immigrazione_clandestina

[5] http://africa.blog.ilsole24ore.com/2009/04/ogni-anno-in-italia-arrivano-20mila-clandestini-con-gli-sbarchi.html

Frazioni e percentuali: un po' di teoria e un po' di pratica

Le frazioni hanno origini molto antiche perché è facile imbattersi in problemi che conducono a **dividere** una data quantità in **più parti uguali*** (equivalenti, equiestese, equipesanti, di stessa durata, ecc...);

Immagino che tutti voi abbiate una vostra idea di cosa sia una **frazione**. In realtà vi sono molti più modi d'intendere una frazione di quelli che, temo, abbiate conservato...

Il *concetto di frazione* viene *introdotto* in relazione al **dividere** in *parti uguali** un TUTTO di riferimento (un dolce, un terreno[6], del denaro, un certo numero di pagnotte, una certa quantità di birra[7], ecc) e poi *prendere alcune* di queste parti.

Probabilmente avete anche presente il **simbolo matematico** che indica una frazione: c'è un numero, sotto di questo una lineetta (- o /) e sotto un altro numero.

Il *numero sotto* la lineetta indica in quante parti uguali* devo **dividere** il mio TUTTO

Il *numero sopra* la lineetta indica di queste parti uguali* quante *prenderne*[8].

Il numero *sotto* si chiama **denominatore** (*denominare*: dare il nome -in questo caso un numero- in conseguenza di un'azione),

la lineetta si chiama **linea di frazione**,

il numero *sopra* si chiama **numeratore** (*numerare*: contare).

Il **denominatore** si legge come un numero *ordinale* (al singolare se al numeratore c'è 1, al plurale se c'è un numero maggiore di 1), il **numeratore** si legge come un numero *cardinale*. Specifico perché spesso gli studenti "leggono male" le frazioni...

ES: 3/5 si legge *tre quinti*, 7/11 *sette undicesimi*, ¼ si legge *un quarto*, ½ si legge *un mezzo*: ha uno statuto speciale!

Nel linguaggio parlato si fa spesso uso di frazioni:

- Chiamami fra tre quarti (3/4) d'ora
- Questa gomma costa dieci centesimi (10/100) [sottinteso, di euro)
- Considerando le frazioni in quest'accezione, cioè come <u>parte di un TUTTO</u>, si accosta SEMPRE alla frazione un **complemento di specificazione** che stabilisce appunto cosa sia questo TUTTO:
  - Determina di 2/5 **della** circonferenza in figura
  - Quante mele corrispondono ai ¾ **di** 12 mele?

Ciò premesso possiamo già introdurre la definizione di **percentuale**:

DEF La percentuale è una frazione, <u>intesa come parte di un TUTTO</u>, avente <u>denominatore 100</u>.

Innanzitutto un'osservazione sul *nome ingannatore*: **PER**centuale fa pensare ad una moltiplicazione per 100 invece che una **divisione** per 100.

---

[6] Nel caso di terreni le forme degli appezzamenti possono essere anche differenti, purché l'estensione sia la stessa; oppure ci si può basare sul valore economico ed avere anche appezzamenti di area differente, purché di stesso valore economico!

[7] nell'antico Egitto era la "paga" per il lavoro!

[8] Se volessimo considerare anche frazioni improprie, come 10/7 le cose si complicherebbero un po'.

Poi, perché questo denominatore 100? Perché le frazioni con *denominatori differenti* sono molto difficili da **confrontare**. Per esempio, tu **PIJI** sapresti dirmi, fra 5/9 e 4/7 qual'è la frazione più grande? Come si fa a stabilirlo? Ci sono due metodi validi entrambi. Ai fini del nostro discorso ci serve conoscerli tutti e due, perciò vediamoli:

- Si può considerare una frazione come una **divisione** non solo di un TUTTO di riferimento, ma proprio fra **numeratore** e **denominatore** stessi (e così facciamo capoccella nel meraviglioso mondo del concetto di **divisione**. Ci riaffacceremo!):

5/9 = 5:9 = 0.(5)   4/7 = 4:7 = 0.(571428)

Perciò è più grande 4/7 (vero?) e credo non sembrasse "a occhio"

- L'altro modo consiste nel trasformare le frazioni date in **frazioni equivalenti**[9] aventi stesso denominatore. E' una questione un po' delicata, vi racconterò solo nel caso specifico come procedere[10] (posso dare per scontato che la **moltiplicazione fra frazioni** sia FACILE da eseguire?): $\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{7}=\frac{35}{63}$ e $\frac{4}{7}\cdot\frac{9}{9}=\frac{36}{63}$.

Ora che hanno stesso denominatore per confrontarle basta guardare i numeratori, vero? 36>35 perciò $\frac{4}{7}>\frac{5}{9}$.

Torniamo a BOMBA. Nei problemi con **percentuali** gli elementi in gioco sono 3 (+1):

*TUTTO (**T**), indice percentuale (**ip**), valore percentuale del TUTTO (v_{pT}) (Sconto: **T**- v_{pT})*

Ci sono 6 tipi possibili di problemi inerenti sconto e percentuali.

Vediamo un esempio nel quale vanno utilizzate le frazioni equivalenti e la nuova accezione di frazione (come **divisione**) data sopra:

ES Un cappotto costava, prima dello sconto[11], 800€. Scontato costa 550€. Il negoziante dichiara uno sconto del 35%. E' onesto o no?

Bisogna fare 800 – 550 = 250€. Verificare se 250€ è il 35% di 800€ significa verificare che la frazione 250/800 è ***equivalente*** alla frazione 35/100.

Per verificarlo utilizziamo il I metodo che ho indicato: eseguiamo le **divisioni**:

250:800=0,3125   e   35:100=0,35

E già perché, espresso in decimali, 35% = 0,35

Chiaramente il negoziante ha imbrogliato!

Proseguiamo con **esempi** con **difficoltà bassa** sempre tratti dall'ambito shopping:

ES Un cappotto costa 800€, vi si applica uno *sconto* del 20%, quanto costa il cappotto scontato? Immagino che molti di voi, per risolvere il problema seguano questi passaggi: 800:100x20=160. Poi 800-160=640€ ed è corretto!

---

[9] Le *infinite* frazioni equivalenti a una *frazione (ridotta ai minimi termini)*, si ottengono moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso numero: il **fattore di molteplicità**. In simboli: $\frac{n}{n}\cdot\frac{a}{b}=\frac{n\cdot a}{n\cdot b}$.

[10] Si cerca un comune denominatore chiamiamolo **C.D.** nel nostro esempio si ottiene moltiplicandoli fra loro, i denominatori, perché non hanno divisori in comune) Poi si cerca, per ogni denominatore, il *numero per il quale moltiplicare quel denominatore per farlo diventare il* **C.D.**, ovvero il **FATTORE di molteplicità** (basta dividere il **C.D.** per ciascun denominatore, vero?)

A questo punto si moltiplicano denominatore e numeratore per il fattore di molteplicità (ce ne sarà uno differente per ogni frazione) e così si ottiene una frazione equivalente.

[11] Qui c'è un po' un abuso di linguaggio: c'è indice di sconto che è il valore percentuale e lo sconto vero e proprio che è la cifra, in euro, di cui viene diminuito il prezzo. Mi atterrò al linguaggio convenzionale per non appesntire.

Però 800:100x20=160, che in questo caso semplice funziona bene, si rivela un impaccio quando vogliamo risolvere problemi più complessi.

E' necessario spendere della fatica salendo di livello di astrazione per, in cambio, avere uno strumento di calcolo e concettuale più potente e più versatile.

Dividere un numero per un altro significa moltiplicare il primo per l'inverso[12] del secondo.

Se devo effettuare questa **divisione**: 200:10, la posso anche pensare in questo modo nuovo: $200 \cdot \frac{1}{10}$ e (devo saper effettuare la moltiplicazione fra frazioni e saper intendere una frazione anche come **divisione** fra numeratore e denominatore).

Otterrò in entrambi i casi lo stesso risultato: 20.

Che ci guadagno allora? Tantissimo: smetto di distinguere due operazioni differenti, moltiplicazione e **divisione**, e mi ritrovo a trattare un'unica operazione: la **moltiplicazione** fra frazioni. E, grazie a questa nuova concezione di **divisione**, mi metto in grado di risolvere qualunque problema inerente frazioni e percentuali.

Per partire ho già che il 20% **di** 800€ diventa un'unica operazione: $\frac{20}{100} \cdot 800 = 160$

O ancora che il prezzo scontato è l'80% del prezzo intero e perciò: 80/100 ·800= 640

Vediamo un altro **esempio**, di come, sapendo vedere la frazione in modi differenti e sapendo operare su essa si possono risolvere facilmente problemi significativi:

ES Un pacchetto di azioni che vale 100€ in borsa sale di valore del 5% durante una giornata. Di quale percentuale deve scendere, il giorno successivo, per tornare al valore originario? 100 -> 105. Se scendesse del 5% (come si può pensare) scenderebbe sotto 100 (il 5% di 105 > di 5). Si tratta di trovare un **ip**, tale che moltiplicato per 105 dia 5 (il valore da togliere a 105 per avere 100!).

ip · 105 = 5. Come prima si può tradurre questo problema: dobbiamo trovare quale frazione, questa volta con denominatore 100, sia equivalente a 5/105. Più semplice se pensiamo alla percentuale in forma decimale come abbiamo visto prima:

5 :105=0,048 circa: il 4,8%.

Se capisco bene il significato profondo dell'operare con le frazioni posso collegare gli elementi caratteristici dei problemi con percentuali, mediante un *gioco delle 3 carte*:

$$ip \cdot T = v_{pT} \qquad ip\cdot = v_{pT} / T \qquad T = v_{pT} / ip\cdot$$

ES Mi offrono un lavoro. Mi pagheranno mediante la famigerata **ritenuta d'acconto**, che ammonta al 20% dell'importo lordo. Devo proporre io un compenso che ritengo equo. Quanto devo chiedere per ottenere un netto di 1000€?

Posso riformulare il problema in questi termini[13]: l'80% **del** mio stipendio voglio che sia 1000€, Quanto dev'essere il mio stipendio (***S***) per ottenere ciò?

Abbiamo visto come quel "di", accanto a 80%, diventa una moltiplicazione

[12] **DEF l'inverso** di un **numero** è quel numero che moltiplicato per il numero dato mi dà come prodotto 1. Oppure, in soldoni, è il numero "ribaltato" senza modificarne il segno.

[13] Oppure arrivarci con un passaggio in più: $S - \frac{20}{100} \cdot S = 1000€$ ecc....

80% · **S** = 1000€ cioè $\frac{80}{100}\cdot S = 1000€$ (i più scafati possono anche semplificare la frazione ottenendo: $\frac{4}{5}\cdot S = 1000€$) Oppure anche: $0{,}8\cdot S = 1000€$

Possiamo fare: **S** = 1000/80·100 = 1250 **Che significa concettualmente?**

Effettivamente se1000€ corrispondono a 80/100 di **S**, **dividendo** 1000 per 80 si ottiene quanto corrisponde ad 1/100, e poi moltiplicando per 100 il valore intero.

Oppure, più "alla fisica": **S** = 1000/0,8 = 1250 (**sfatiamo il mito che il quoziente di una divisione sia più piccolo del dividendo**)!

In **fisica** ogni grandezza espressa mediante una frazione (la densità, la velocità, ecc): si legge: *"quantità al numeratore relativa all'unità della grandezza al denominatore"*. Per **ES** la densità, m/V, si legge massa per unità di volume: fissato un metro cubo come unità di volume, che massa di una certa sostanza lo occupa?

Nel nostro caso quindi ci chiederemmo quanti € (al numeratore) corrispondono all'intero (relativo al denominatore)? E infatti il risultato è la quantità di € corrispondente allo stipendio INTERO!!!

Ultimo ma non ultimo **S** = 1000:4/5=1000·5/4 perché **dividere** per un numero (e una frazione è anche un numero), significa moltiplicare per il suo inverso!

Per controllare che sia tutto andato per bene facciamo la prova: il 20% di 1250 è 250 e 1250-250=1000 come volevamo.

ES3 Un cappotto scontato del 30% costa 560€, quanto costava il cappotto prima dello sconto? 560 è il 70% del prezzo intero che, quindi, sarà: 560€ ·100/70=800€

✘ Dal sito **dell'ISTAT**: "...[Nell'agosto 2010] il numero delle persone in cerca di occupazione ... aumenta del 3,6 per cento rispetto ad **agosto** 2009".

Che vuol dire questo? Se si fa la <u>differenza tra chi cerca lavoro nell'agosto 2010 e chi lo cercava nell'agosto 2009</u> si ottiene un certo numero positivo (il segno ci dice che si tratta di un aumento) che, *rapportato* al numero di persone che cercava lavoro nell'agosto 2009 dà come risultato 0,036. Infatti 3,6 percento sarebbe 3,6/100=0,036!

Posso risalire, da questo dato, a quante sono le persone che cercavano lavoro nell'agosto 2010 o nell'agosto 2009? NO, ma se avessi unodei due nuemri portei rislaire all'altro.

Concludiamo con un **problema classico** (per vedere se avete capito)!

Nel Paese del **Kiwi** vi sono 200.000.000 di abitanti.

La metà, circa sono maggiorenni e possono quindi andare a votare. Li chiameremo d'ora innanzi "**aventi diritto**" (100.000.000).

Degli aventi diritto però solo il **50**% va effettivamente a votare (50.000.000). Alle elezioni il Partito di Pippo prende il 70% delle preferenze: una maggioranza schiacciante!

Quante persone hanno votato effettivamente il Partito di Pippo? (7/10·50.000.000 = 35.000.000).

Che percentuale degli aventi diritto vengono rappresentati dal Partito di Pippo? (35%) Che percentuale del Paese nel suo complesso viene rappresentata dal Partito di Pippo? (17.5%)