Come mai la matematica è così difficile?

20.30 brano1: ***Foo fighter - Erase/Replace***

"Abbiamo parlato, nelle puntate precedenti, di alcuni campi specifici della matematica, in particolare di **numeri** e **figure** e di alcuni procedimenti caratteristici, come quello del **definire**.

Vi sarete accorti della *difficoltà* che abbiamo incontrato nel cercare di far comprendere quello che avevamo in mente, oltretutto senza avere la possibilità di farvelo vedere, mediante rappresentazioni grafiche (siamo alla RADIO!).

Insomma, anche noi abbiamo avuto chiara la sensazione che la matematica è difficile, esperienza che forse accomuna molti ascoltatori. Questa volta abbiamo voluto chiedere a insegnanti e ricercatori (in didattica e non) una loro sintetica impressione sulle asperità della matematica.

Walter Maraschini

(autore di libri di testo, assieme a Mauro Palma; sta curando sempre assieme a Palma la Garzantina della matematica e, di recente ha pubblicato per Mondadori "Bravi in matematica")

Non è che la matematica, di per sé, sia difficile. E' però **impegnativa**.

Richiede cioè impegno e applicazione prima che arrivi il **piacere**.

La matematica, cioè, non è una *marchetta*, sesso a pagamento, soddisfazione subito che muore nel momento in cui nasce.

Richiede impegno e partecipazione - affetto e consapevolezza per qualcosa che arriverà - prima che arrivi il piacere, pregustandone l'arrivo.

Una raffinata esperienza erotico-intellettuale insomma.

E' un gusto che si forma e richiede una capacità proiezione[1].

"Che taijo, presso'!" - a Roma vuol dire "che bello!" - ha esclamato una mia studentessa pochi giorni fa, alla fine della dimostrazione del fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto.

Non l'aveva entusiasmata il risultato (che già conosceva) ma il ragionamento che vi ci portava. [E il fatto di "vedere" quella dimostrazione, non solo con gli occhi, ma di saperla mettere in relazione con quanto sapeva già]

Non è difficile la matematica: è impegnativa. E quando è possibile va fatta vincere la bellezza di un impegno entusiasta: va fatto capire che tra l'oggi e il domani c'è sempre un percorso; va fatta vivere, perciò, la **bellezza della ricerca del percorso**.

Walter propone di riflettere su uno dei punti chiave dell'insegnamento: il saper comunicare che la fatica non è fine a sé stessa ma è orientata al raggiungimento di un piacere, tutto intellettuale ma pur sempre un piacere! Che non dobbiamo

[1] Laura Catastini (vedi pag. 3) ha all'uopo inventato una nuova definizione di **concretezza** basato piuttosto che su criteri sensoriali, su criteri inerenti la predittività (sulla scia della scoperta dei neuroni specchio e sul loro ruolo in molti ambiti relativi alla nostra interazione con l'esterno). Innanzitutto bisogna definire quand'è che un qualcosa è SIMULABILE: quando è possibile fare inferenze su questo qualcosa (non necessariamente solo verbali) con carattere predittivo. Ora, nella nuova accezione proposta da Laura Catastini, un qualcosa sarà da ritenersi tanto più concreto quanto più SIMULABILE.

faticare per faticare ma per essere in grado alla fine di spassarcela[2]. Anche risolvendo un problema di matematica, perché no?

Stiamo affrontando in queste puntate cosa intendo con “spassarsela”: stiamo parlando del piacere di CAPIRE, COMUNICARE, SCEGLIERE e degli innumerevoli contributi della matematica alla Cultura in genere, ma si potrebbe fare anche un esempio banale: si spendono fiumi di grafite per giochi come il SUDOKU, vuoi mettere un bel problema di geometria analitica? O un teorema di quelli fatti bene?

Questo è un aspetto importante che riguarda noi insegnanti (e so che ce ne sono in ascolto): quanto ci impegniamo noi nel comunicare il **piacere d’imparare**?

E in questa direzione, quanto lavoriamo per far capire agli studenti che è necessario che si facciano carico della **responsabilità** del proprio percorso formativo per avere successo nell’apprendimento, in particolare della matematica, e poi spassarsela?

Ci vuole ***Karisma***… E se lo dici con la K ecco che viene fuori:

Brano2: 20.55 ***Karisma - Dandoinumeri***

Brano3 ***The Smiths - Panic***

Domenico Fiorenza

(ricercatore in geometria all’Università “La Sapienza” di Roma)

Onestamente non ho idea del perche' la matematica sia difficile. Io l'ho sempre trovata facile. Se penso a cose difficili penso alla storia o alla politica, l'economia. Cose con un'**infinità di variabili e di possibili interpretazioni tutte ragionevoli e allo stesso tempo in contraddizione tra loro**. La matematica credo sia invece **"non interessante"**, nel senso che quando la si comincia a studiare non si vede subito il suo impatto nel quotidiano, uno pensa, “ma che me ne frega a me de 'sta roba?” e così si perde le basi, e poi è perso per sempre.

Domenico tocca alcuni degli argomenti più delicati ribaltando quella che è una percezione diffusa su cosa sia facile e cosa no. Scrive sulla stessa linea

Domingo Paola

(Insegnante in ruolo presso il Liceo di Finale Ligure e ricercatore presso il G.R.E.M.G.):

La matematica è, SOTTO CERTI ASPETTI, innaturale

Uno dei vantaggi evolutivi dell'homo sapiens sapiens è la capacità di accorgersi delle **variazioni**. I nostri antenati non avrebbero avuto sensibili possibilità di preservare la specie se, nella dura vita della savana, non fossero risultati particolarmente efficienti ed efficaci nell'accorgersi delle variazioni: un movimento nel buio della savana può voler dire pericolo e accorgersi immediatamente del suo accadere aumenta le probabilità di salvarsi.

Per natura, siamo quindi particolarmente attenti a ciò che varia: un bambino che vede un parallelogramma trascinato per uno dei suoi vertici in un software di geometria dinamica, nota immediatamente e naturalmente, senza alcuna difficoltà, la variazione delle dimensioni, del perimetro, dell'area, delle misure angolari … fa invece fatica a guardare il movimento con occhio matematico, prestando attenzione, quindi, **non** a ciò che **varia,** ma agli **invarianti**, ossia a ciò che, nel movimento, resta immutato: per esempio il parallelismo dei lati; il centro di simmeria; l'uguaglianza dei lati opposti del parallelogramma...

[2] Per “spassarsela” è necessario avere un mondo interno di rappresentazioni che sia in grado di accogliere i nuovi concetti che man mano incontriamo, organizzando loro l’accoglienza ancor prima che arrivino!

Questa **capacità di cogliere invarianti è una capacità tipicamente matematica**, è la capacità di vedere i fenomeni con occhio matematico e, anche se è una caratteristica del pensiero umano, è meno naturale della capacità di cogliere differenze e variazioni. Va quindi coltivata, guidata, faticosamente acquisita.

Sull'innaturalezza della matematica – e quindi sulla necessità assoluta di apprenderla per tempo e per bene - si spende molto anche un'altra docente-ricercatrice (che ha scritto nel 1990 un libro molto interessante: *Il Pensiero allo specchio*, La Nuova Italia):

Laura Catastini

(distaccata presso l'Università di Roma Tor Vergata dal 2000 e membro del Consiglio direttivo del Centro Interdipartimentale di Ricerca e Formazione Permanente per l'Insegnamento delle Discipline scientifiche).

L'apparato mentale è vincolato da stretti parametri, pur nella sua plasticità: se per esempio, tanto per parlare di una capacità innata, non si impara a parlare entro i dodici anni si perde per sempre questa possibilità e ci potrà esprimere solo in forma ridotta, senza sintassi.

Lo scrivere e il calcolo poi **non sono innati**, e l'addestramento cognitivo dato dal processo di scrittura è fondamentale in una società in cui la cultura ha un estremo carattere simbolico come la nostra.

Un esempio di innaturalezza e formatività a un tempo della matematica è dato da un'attività che gli studenti sanno (senza saperlo) essere fondamentale per risolvere un problema di geometria, e cioè il ricentramento cognitivo:

DEF Dato un quadro concettuale, il **ricentramento cognitivo** si attua ogni volta che tra gli elementi costitutivi del quadro stesso si intravedono nuove relazioni, che ne fanno emergere nuova conoscenza rispetto a quella iniziale (cfr quelle immagini della **Gestalt** che cambiano a seconda del "come le si guarda": la donna con cappello che è anche una vecchi acon il nasone, ecc).

Ad esempio PIJI, la **bandiera della Finlandia**, quanti rettangoli ha al suo interno?

Questo movimento di pensiero spesso cambia il ruolo o la funzione di uno o più elementi del quadro che si sta trattando, **ES** l'altezza di un triangolo isoscele può essere considerata ANCHE cateto di ciascuno dei due triangoli rettangoli congruenti in cui l'altezza stessa divide il triangolo, opure bisettrice dell'angolo opposto alla base, oppure facente parte dell'asse della base stessa.

La capacità di vedere nuovi legami significativi e connessioni tra cose diverse, anche molto distanti tra loro , è uno dei tratti importanti dell'intelligenza, che viene in questo senso sottoposta a un buon addestramento (ma faticoso e per questo percepito come **difficile**) dalla matematica.

Ma è anche quello che fa l'artista quando rilegge in una chiave mai utilizzata prima la realtà in cui viviamo tutti, no?

Quindi la **matematica è faticosa** non solo perché richiede un altissimo grado di concentrazione, controllo e profondità su singole attività, in qualche modo **FISSE**: la precisione del linguaggio nelle definizioni (emisfero SX), il rigore necessario per effettuare un calcolo, ecc ma sopratutto in quanto chiede di effettuare attività in qualche modo **DINAMICHE**, come il ricentramento cognitivo o il rimpallo fra analisi (emisfero SX) e sintesi (emisfero DX) necessario alla risoluzione di un problema di geometria analitica come per la traduzione di una versione di latino.

21.15 brano4 ***They might be giant - Wishlisting in the dark***

Brano5 ***John Mayer - Clarity***

"La matematica è impegnativa, la matematica è faticosa". Tante cose sono faticose si potrebbe obiettare... Perché quello della matematica è un impegno nel quale non si riesce a coinvolgere troppi studenti prima e troppe persone poi?

Avrei voluto cominciare la puntata cercando di spiegare cosa sia la Matematica, ma **Domingo Paola** mi ha messo in guardia: "Attenta, non c'è un'unica e condivisa definizione di matematica!"

E già questo è un buon argomento ancora: CONTRARIAMENTE A QUEL CHE SI PENSA IN GIRO, non c'è un'unica, monolitica e condivisa concezione di Matematica Neanche della Matematica da insegnare. Utilizzando una schematizzazione bianco/nero proposta da una ricercatrice il cui lavoro stimo molto – **Rosetta Zan** prof. Associato presso il Dipartimento di Matematica di Pisa. Ricercatrice in didattica) - si può pensare che la matematica sia:

o **Strumentale**	*o* **Relazionale**
Formule Ricordare Esercizi Prodotti	Ragionare Pensare Problemi Processi

E può accadere che uno studente abbia **un'idea di matematica differente da quella del proprio insegnante** e quindi entrino in conflitto (e chi "perderà"?)!

E ancora può capitare che uno studente cambi un insegnante all'anno – come accade e lo so bene – e ciascuno di questi abbia un'idea di matematica differente dal precedente (e convinto che la propria sia GIUSTA)!!!

E non sempre accade che un insegnante abbia effettuato una riflessione attenta e consapevole sulla propria idea di matematica e di insegnamento della stessa.

Per esempio condivido una classe con un collega: io insegno fisica e lui matematica. Una volta si è lamentato dicendo "...*e poi mi chiedono sempre "perché" quando spiego loro cose di matematica. "Perché e perché: sono solo TECNICHE per risolvere problemi, mica dobbiamo fare della filosofia*!" E gli ascoltatori più assidui forse possono immaginare la stretta al cuore che ho provato...

La matematica è "inaccessibile" direttamente

Me entriamo ancora un po' di più DENTRO la matematica. Abbiamo parlato già un po' degli **oggetti della matematica** (in senso metaforico, visto che io non ho una prospettiva realista): numeri, figure geometriche, formule, teorie, relazioni, funzioni, ecc.

Ebbene PIJI, qual è la loro caratteristica forse più evidente? EBBENE sì: non sono accessibili ai nostri sensi.

Non è possibile assaporare un numero, ascoltarne la voce, tastarne la consistenza, odorarlo e nemmeno vederlo. La nostra esperienza degli "oggetti matematici" è fondata sui contatti che abbiamo con le loro **rappresentazioni**. E qui ci sta tutto il **Paradosso di Duval** che ho scoperto – troppo da grande - leggendo "***Didattica della matematica***" di

Bruno D'Amore

(ricercatore in didattica della matematica a Bologna con un curriculum impressionante):

"Da una parte l'apprendimento di oggetti matematici non può che essere un **apprendimento concettuale** e, d'altra parte, è solamente attraverso **rappresentazioni** [semiotiche] che un'attività sugli oggetti matematici è possibile.

Questo paradosso può costituire un circolo vizioso per l'apprendimento. In che modo infatti soggetti in fase di apprendimento potrebbero **non confondere gli oggetti matematici con qualche loro rappresentazione** se possono avere a che fare solo con rappresentazioni?

L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di qualunque rappresentazione rende la confusione pressoché inevitabile. E, di contro, **come possono acquisire la padronanza dei procedimenti matematici necessariamente legati alle rappresentazioni se non hanno già compreso concettualmente gli oggetti rappresentati**?"

E a volte uno stesso segno rimanda a discorsi matematici - se non differenti - leggermente slittati (com'è per il simbolo di **frazione** che abbiamo visto avere più di un'accezione possibile) o anche per il segno di uguaglianza: se si scrive $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ il segno uguale può rinviare alla relazione fra a+c e b (in senso strutturale in ogni discorso in cui compare a+c esso è sostitubuile con b), oppure, in senso procedurale, vuol dire che il risultato del processo a+b è c. Oppure ancora, se al posto di b leggiamo $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ diventa una domanda: qual'è il numero che addizionato ad a dà come risultato b?

Più spesso di uno stesso concetto ci sono più rappresentazioni: verbale, numerica, grafico-geometrica, simbolica, ecc. ES **FRAZIONI** (fissando uno dei significati pure se ne possono dare differenti rappresentazioni)

Quanto noi insegnanti siamo consapevoli che non basta presentare la **rappresentazione** di un concetto agli studenti e insegnare loro a "giocare" con questa rappresentazione (trattamento), per esser certi che gli studenti abbiano compreso il concetto invece delle regole di gioco con la sua rappresentazione?

Quanta attenzione prestiamo nel mostrare che di uno stesso concetto sono possibili più rappresentazioni e quanto aiutiamo i nostri studenti a passare da una rappresentazione all'altra?

21.35 brano6 ***Elvis Costello – Brillant mistake***

Brano7 ***Placebo – You don't care about us***

Ancora **Domingo Paola**: **Le inopportunità didattiche**

Per molto tempo la matematica è stata utilizzata, nell'insegnamento, come uno dei pricipali e più efficaci **strumenti selettivi**.

Non comprendi la dimostrazione del teorema che afferma che *gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali*? Sei destinato a non oltrepassare il ponte che porta dalla scuola di base ai livelli successivi.

Forse non a caso quel teorema è noto come il *pons asinorum,* che evoca l'immagine degli asini impossibilitati per le vertigini a oltrepassare il ponte, triste e violenta metafora per riferirsi a chi non capisce la dimostrazione del teorema.

E chi, avendo almeno una cinquantina d'anni, non si ricorda le interminabili ore passate durante tanti anni scolastici a semplificare espressioni a più piani? Insomma, sempre per farla breve, ore e ore di esercizi spirituali per la conquista di tecniche, spesso fini a loro stesse, con poca o nessuna attenzione per la risoluzione di problemi, per le applicazioni, per la **storia** della disciplina.

Tutto ciò, spesso condito da una minima attenzione agli aspetti emozionali - affettivi, ha creato intorno alla matematica, un'aura di aridità, difficoltà, astio, timore ...

Sull'onda di questi **aspetti** più prettamente **relazionali** concludo con alcune considerazioni di **Rosetta Zan** – intervista sul sito Treccani - sull'atteggiamento tipico del docente "medio" di matematica di fronte all'insuccesso di uno studente.

Domanda: Molti sono gli studenti che continuano a commettere gli stessi errori anche se l'insegnante si affanna a rispiegare più volte per correggere l'errore. È possibile prevenire queste difficoltà?

Risposta: Parto dal fondo della sua domanda. Uno dei punti cruciali è proprio quello che dice lei: 'l'insegnante si affanna a rispiegare più volte per correggere l'errore'. In quell'*affanna* è ben sintetizzato lo sforzo dell'insegnante, accompagnato da ansia, e direi da una scarsa fiducia che l'insegnante stesso ha imparato a nutrire nell'efficacia di questo sforzo…

Ma in quale comportamento si concretizza questo sforzo? Come dice lei, nel 'rispiegare più volte'. Quel 'rispiegare più volte' non è l'unico comportamento che l'insegnante ha a disposizione [MA NON LO SA].

Inoltre è un comportamento che non è fondato su un'analisi attenta delle difficoltà. A questo proposito mi sembra molto espressiva la metafora della medicina.

Immaginiamo un medico che di fronte a un disagio del paziente continui a dare la stessa cura, pur se la cura si è dimostrata inefficace (e non solo con quel particolare paziente, ma con molti di quelli che manifestano lo stesso disagio). Immaginiamo addirittura che il medico si lamenti del paziente, perché non ha risposto positivamente alla cura!

Tutto questo ci appare – giustamente – paradossale. A quel medico ci verrebbe spontaneo dire: ma è sicuro che quella cura vada bene per la malattia del suo paziente? E' sicuro che la sua diagnosi sia corretta? Non sarà il caso di fare altri accertamenti?

Eppure è esattamente quello che succede a scuola quando 'l'insegnante si affanna a rispiegare più volte per correggere l'errore'.

Bruno D'Amore: L'errore è visto con una connotazione negativa (quanti scarabocchi fanno gli studenti sui loro fogli per nascondermi gli ERRORI che fanno?) e non come "sintomi" di un malessere cognitivo da curare

Il fatto è che nella scuola c'è un sottile senso di **moralismo** che ci fa sentire in pace con la nostra coscienza se in qualche modo 'soffriamo'. Ma tutto ciò è ben lontano dalla razionalità nell'affrontare i problemi, che fra l'altro è uno degli obiettivi fondamentali dell'insegnamento della matematica…

brano8 **Steely dan – Babylon sister**