20.30 brano **U2 – *ONE*** 4’39

Insiemi numerici

L’Uno ha acquisito lo status di numero solo nel ‘500d.C. Fino a quel momento era inteso un po’ come nel brano di inizio: come unicità

Oggi è il **pi-day**: 14 marzo infatti in inglese si scrive: 3.14 che è l’approssimazione più comune di pi greco: π

In principio era il **numero**?!? Dal risvolto del libro di **Paolo Zellini**, ***Numero e logos***: infatti leggiamo: *“Logos* non è solo il «discorso», né si può intendere come semplice «parola» il Verbo che, secondo Giovanni, sta all'inizio del tutto.

È inevitabile, se vogliamo recuperare il senso perduto del *logos*, paragonarlo al numero, poiché i loro destini si sono intrecciati a tal punto che l'uno non sarebbe esistito senza l'altro”!

Ma non siamo pitagorici né ci interessano le dispute teologiche qua: era solo per cominciare col botto!

A che tipo numero hai pensato tu PIJI? E voi? Scommetto che MOLTI hannno pensato ai numeri naturali (detti anche interi positivi), vero?

E invece i numeri vanno ben oltre i numeri naturali. Sentiamo dalla voce di Roberta Pellini (doppiatrice di Julia Ormond ne “Il senso di Smilla per la neve” (tratto dal libro *di Peter Hoeg*) una presentazione che può tornarci utile per il nostro discorso.

Smilla

<<*... Per me il sistema numerico è come la vita umana.*

*Alll’inizio ci sono i numeri naturali. Vale a dire quelli interi e positivi. Come i numeri del **bambino**. Ma poi la coscienza umana si espande.*

*E il bambino scopre il **desiderio**. Sai qual è l'espressione matematica del desiderio? I numeri negativi: la formalizzazione del sentimento di una mancanza*

*Poi il bambino scopre **ciò che sta in mezzo agli spazi**. Ciò che sta in mezzo alle pietre, in mezzo alle persone, in mezzo ai numeri. E questo produce le frazioni*

Ma è come una specie di follìa perché non finisce nemmeno lì: continua all’infinito. Ci sono numeri che non possiamo nemmeno cominciare a comprendere.

La matematica è un paesaggio aperto, infinito. Tu vai verso un orizzonte che continua ad allontanarsi, come la Groenlandia. Ed è di queso che non posso fare a meno”

Sviluppiamo il racconto breve che ci fa **Smilla** (e magari cominciamo a capirci qualcosa su questi fantomatici numeri *che non possiamo nemmeno cominciare a comprendere*): 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 tana per chi sta dietro di me!

Chi ha figli li ha visti imparare a **contare** prima ancora che capissero cosa significava quella cantilena da sciorinare così, tutta di fila! Ricordo ancora (o credo di farlo) il giorno in cui mia figlia, guardando due pupazzetti su un tavolino si è guardata indice e medio e si è illuminata: DUE! E indicava alternatamente le dita e i pupazzetti. E da lì è stato un attimo collegare quelle paroline in fila a dei concetti.

In linguaggio matematico mia figlia ha creato delle “**classi d’equivalenza**”. Una prima interpretazione *ingenua* di numero è infatti questa: un certo numero è l’etichetta astratta che funge da rappresentante di tutti gli insiemi contenenti la stessa quantità di elementi che il numero, appunto, indica.

ES il **2** indica tutte le **coppie** possibili (e impossibili) del mondo, ecc...

Dietro a questa definizione di numero c'è il concetto di **corrispondenza biunivoca**: un brutto nome per indicare una *corrispondenza uno a uno*. Due insiemi infatti hanno lo **stesso numero di elementi** ⇔ c'è una corrispondenza uno a uno fra i loro elementi cioè ⇔ possono essere messi in corrispondenza biunivoca.

brano: **Feist – *1234*** 3'21 (non registrato dal fonico!)

brano **John Mayer – *83*** 4'45

Vedremo quanto sia importante per poter "contare" gli elementi di insiemi **infiniti**. Perché l'insieme dei numeri naturali è un insieme finito, vero?

"Il numero maggiore di ogni altro numero non esiste, perché non esiste un numero maggiore di tutti i numeri." (Zavattini, *Parliamo tanto di me*)

<u>Piji, sono più i numeri naturali o i numeri naturali pari?</u>

Gli studenti danno due tipi di risposte:

a) i numeri naturali, perché non tutti i naturali sono pari e tutti i pari sono naturali (la parte è maggiore del tutto; nozione comune in Euclide); cioè quello dei numeri pari è un sottinsieme dei naturali.

b) sono insiemi numerici uguali, perché entrambi infiniti.

Sembrano entrambe affermazioni ragionevoli, ma

RISP a) cozza contro la **corrispondenza biunivoca**: *L'insieme* dei naturali e il *sottinsieme* dei numeri pari hanno lo stesso numero di elementi perché posso mettere in corrispondenza biunivoca ogni numero naturale con il suo doppio, che è necessariamente pari! 0 con 0, 1 con 2, 2 con 4, 3 con 6, ecc...

RISP b) farebbe pensare che *tutti gli insiemi infiniti hanno lo stesso numero di elementi* e vedremo (a fine trsmissione) che non è così...

Il problema è che, per rispondere, dobbiamo prendere una decisione: se vogliamo confrontare la *popolosità* (ufficialmente **CARDINALITA'**) di insiemi infiniti, allora l'idea della corrispondenza biunivoca è eccellente: **DEF** <u>due insiemi hanno lo stesso numero di elementi se e solo se possono essere messi in corrispondenza biunivoca</u>.

Questa idea, che funziona ovviamente con gli insiemi **finiti**, consente di estendere il confronto sulla "quantità di elementi" anche a insiemi con **infiniti** elementi.

Anzi proprio su essa **Richard Dedekind** (alla fine del 1800) caratterizzò, per la prima volta nel pensiero occidentale, *il concetto di infinito in positivo*, ossia dicendo che cosa esso **è** e <u>non</u> cosa **non è** (non finito, non limitato, non definito):

DEF <u>si dice infinito ogni insieme che può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.</u>

Ecco perché i numeri naturali sono infiniti: un altro punto di vista, ma la stessa conclusione di Zavattini!

21.15 brano **Numerology** (non registrato dal fonico!)

brano **John Mayer – *3x5***

Ma dobbiamo *ampliare* l'insieme dei numeri naturali se vogliamo rappresentare che succede ad una persona che spende più di quanto abbia in banca... Oppure se vogliamo scendere nel sottosuolo con l'ascensore! O misurare la temperatura del freezer... O se vogliamo esprimere matematicamente il **DESIDERIO**.

Banca, termometro e ascensore sono cose moderne... Come accade agli studenti mediamente infatti, i **numeri negativi** sono stati accettati come *numeri a tutti gli effetti* solo in tempi recenti. Con un processo lento, graduale e per niente privo di conflitti. Ancora nel 1500 matematici come **Stifel** e **Bombelli** chiamavano i numeri negativi “numeri absurdi” e “numeri surdi” (assurdi) e **Cardano** “numeri ficti” (falsi)!

Se di ogni numero naturale prendiamo l’**opposto** (cos’è l’opposto di un numero, PIJI?), e mettiamo insieme: naturali e opposti, abbiamo l’insieme dei numeri **interi**.

Piji, sono più i numeri **naturali** o i numeri **interi**?

Sono insiemi numerici aventi lo stesso numero di elementi! Posso infatti metterli in corrispondenza biunivoca: 0 con 0, i negativi con i pari maggiori di 0 e i positivi con i dispari; per esempio, 1 con +1, 2 con -1, 3 con +2, 4 con -2 ecc..

Z	0	+1	-1	+2	-2	...	+n	–n	...
	↕	↕	↕	↕	↕		↕		
N	0	1	2	3	4	...	2n–1	2n	

Come si effettuano le **operazioni fra numeri interi**? Usando l’intuizione spero siamo tutti in grado di risovere i problemini che vado a presentare, e senza pensare alla regola da applicare! Se la temperatura passa da -8 °C a 8°, che variazione di temperatura c’è stata? Se in banca ho 1000€ e spendo 1200€, cosa segnerà il mio estratto conto? Se un sub si trova a 30m di profondità (cioè a -30 s.l.m.) e scende di altri 20m, a che quota rispetto al livelo del mare si troverà? Ecc...

Uno dei problemi della scuola italiana certo è che si lavora quasi sempre in contesti **astratti**. E’ vero che delle cause della POTENZA della matematica è proprio il fatto di essere astratta (dedicheremo a questo argomento un’intera puntata)! Certo CHI TROPPO VUOLE NULLA STRINGE e pretendere che ragazzini, di OGGI poi, passino dagli abissi di cavolate della TV alle vette dell’astrazione matematica, senza concedere tappe intermedie di decompensazione, è un po’ RISCHIOSO!!! E infatti....

Andiamo comunque a vedere “astrattamente cosa succede”

Partiamo dal presupposto che, scelta un’unità di misura, cioè scelto quanto misura l’uno, si possono rappresentare i numeri interi su una retta.

Scegliamo come “verso destra” il verso in cui i numeri positivi, a partire da zero, crescono: il verso POSITIVO.

Aggiungere un numero **positivo** ad un altro (positivo o negativo che sia) significherà, partendo dal punto in cui si trova l’altro numero, contare tante unità verso **destra** quante ne indica il numero che vogliamo aggiungere,

Aggiungere un numero **negativo** ad un altro (positivo o negativo che sia) significherà, partendo dal punto in cui si trova l’altro numero, contare tante unità verso **sinistra** quante ne indica il numero –tolto il segno- che vogliamo “aggiungere”.

E stiamo così dicendo che addizione e sottrazione non sono più due operazioni distinte ma si fondono nella SOMMA ALGEBRICA! Bel risparmio, fatta la fatica di cambiare modo di pensare!!!

Ma che significa **+** · **-** = **-** e **-** · **-** = **+**? Le famigerate **regole del prodotto dei segni**!

Ogni qualvolta si amplia un insieme numerico bisogna controllare se tutte le proprietà che aveva l’insieme precedente si conservano e quali proprietà nuove abbiamo conquistato! Come abbiamo visto abbiamo conquistato di poter fondere assieme addizione e sottrazione.

Il perché profondo della regola della moltiplicazione dei segni sta nella **conservazione di prorietà delle operazioni** che avevo con i numeri naturali e voglio mantenere anche per gli interi. Però a me piace dare un'immagine che possa aiutare gli studenti a ricordare come fare e che fornisca una sorta di "motivazione".

Assunto che il + indica "verso destra" e che moltiplicare per + indica "continuare nel verso in cui si marcia" e il – significa "verso sinistra" e il moltiplicare per – significa "cambiare verso", +· - = - si legge: "me ne stavo andando verso destra e devo cambiare verso, quindi andare verso sinistra". - · - = + significa: "me ne stavo andando verso sinistra e devo cambiare verso, quindi andare verso destra"

21.35 brano **Queen - *Seven Seas of Rhye*** (non registrato dal fonico!)

brano **Talking Heads - *Pull up the roots* 5' 10** (non registrato dal fonico!)

A questo punto la nostra storia (che non segue un filo cronologico ma logico: stabilito "col senno di poi") prevederebbe di parlare dei **numeri razionali**!

<u>Appoggiamoci al significato delle parole PIJI: quali sono i numeri razionali?</u>

In realtà ti ho imbrogliato un po': all'etimologia più che al significato "in linguaggio naturale" bisogna rivolgersi: **ratio** infatti in latino significa **rapporto**. Non son nient'altro quindi che le **FRAZIONI** (positive e negative)!!!

A proposito di etimologia, *fractionem* viene da fractus p.p di frangere: rompere. Le frazioni sono numeri ROTTI! In effetti, se devo prendere i 3/5 di qualcosa devo romperlo in cinque parti uguali e poi prenderne tre!

Ma per passare dal concetto di frazione come parte di un tutto, alla frazione come **NUMERO** il ragionamento è un po' delicato: abbiamo dedicato una puntata intera a giocare con le frazioni ed i possibili differenti significati e applicazioni che hanno!

<u>Sono più i numeri razionali o i numeri naturali?</u>

Mi spiace! Anche se fra due razioneli ce n'è sempre un altro (la semisomma dei due, almeno), e perciò i razionali sono DENSI, hanno lo stesso numero di elementi dei numeri naturali!

E' difficile crederlo ma si DIMOSTRA! E' possibile infatti stabilire una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei naturali e l'insieme dei razionali, mediante il cosiddetto **procedimento diagonale di Cantor**, che è difficile da spiegare già avendo almeno una lavagna, quindi alla radio non mi ci provo proprio!

Ma ora andiamo a parlare di alcuni dei numeri più interessanti. Quelli di cui SMILLA diceva: **"***Ci sono numeri che non possiamo nemmeno cominciare a comprendere"* riferendosi, credo, ai **numeri irrazionali** e ai **numeri complessi**.

Cominciamo dai **numeri irrazionali**. <u>Appoggiandoti all'etimologia, PIJI, cosa diresti che sono i numeri irrazionali?</u>

DEF I **numeri irrazionali** sono numeri che non è possibile esprimere sotto forma di rapporto.

Per esempio è un numero irrazionale $\sqrt{2}$ cioè, equivalentemente, non esiste un numero razionale che al quadrato faccia 2.

Per inciso misura $\sqrt{2}$ la diagonale di un quadrato di lato 1, come si può ricavare applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele che ha per cateti i lati del quadrato e per ipotenusa la diagonale del quadrato stesso.

E che la diagonale di un quadrato di lato 1 esiste lo riusciamo a credere tutti, no? Però la misura della sua lunghezza non è esprimibile con una frazione, ossia con un numero decimale finito o periodico...

La dimostrazione di questo fatto la diede già **Ippaso di Metaponto** nel VI sec. a.C.. Forse il pitagorico più influente dopo li fondatore, la leggenda narra che, avendo divulgato queste nozioni all'esterno della scuola, contrariamente alle prescrizioni di Pitagora, per la sua *empietà* morì in un naufragio. In effetti questa "scoperta" era una tragedia per la scuola pitagorica perché ne minava alle basi le fondamenta: Infatti dire che il rapporto tra diagonale e lato di un quadrato è un numero irrazionale equivale a dire che le due grandezze hanno un sottomultiplo multiplo comune, idea che era alla base della visione pitagorica del mondo

La **DIM** è molto SEMPLICE (il che non vuol dire facile, specialmente alla radio!): basta servirsi della suddivisione dei numeri naturali in *pari e dispari* e del fatto che *il quadrato di un numero può essere pari se e solo se la sua base è pari*.

Ciò premesso la dimostrazione è una **dimostrazione "per assurdo"**. Che si effettua cioè negando la tesi (affermando che è vero il contrario) e andando a vedere che, così facendo, si perviene a negare l'ipotesi.

Per dimostrare che A $\Rightarrow$ B, dimostro l'implicazione equivalente: nonB $\Rightarrow$ nonA .

[Neghiamo la tesi e supponiamo che esista una frazione propria (non semplificabile) che al quadrato faccia 2. Posso assumere per ipotesi che *numeratore e denominatore non siano entrambi pari*: altrimenti la frazione sarebbe semplificabile.

Ma $\frac{a^2}{b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2 \cdot b^2 \Leftrightarrow$ <u>***a*** è pari</u> perciò posso scrivere: *a* = $2 \cdot h$ e perciò la mia uguaglianza di prima diventa: $(2 \cdot h)^2 = 2 \cdot b^2 \Leftrightarrow 4 \cdot h^2 = 2 \cdot b^2 \Leftrightarrow b^2 = 2 \cdot h^2$ e quindi <u>anche ***b*** è pari</u>, contrariamente a quanto avevo assunto per ipotesi.]

$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale come pure la larghissima parte dei numeri corrispondenti a lunghezze di segmenti -geometricamente parlando- o a radici di numeri -aritmeticamente parlando- e i numeri *speciali* come π e altri meno "famosi" (almeno fuori da istituti superiori e università scientifiche).

<u>Sono più i numeri **irrazionali** o i numeri **naturali**?</u>

Questa volta sono di più i numeri *irrazionali*! Ma si tratta sempre di insiemi infiniti!!! Ciò vuol dire che esistono diversi ordini d'infinito: almeno l'ordine d'infinito dei numeri naturali (indicato con *aleph 0*) e l'ordine d'infinito dei numeri irrazionali (indicato con aleph 1). Ma chi vuol saperne di più deve continuare a seguirci fino alla puntta dedicata all'infinito che non sarà né la prossima né fra due ma lunedì 4 aprile direi! Stay with us!!!

L'unone fra l'insieme dei numeri razionali e dei numeri irrazionali costituisce l'insieme dei numeri **reali**. Che ha la stessa cardinalità degli irrazionali.

L'estensione ulteriore si ha attribuendo lo **status di numero** alla radice quadrata di -1 che viene indicata con la lettera ***i*** (immaginario!). Combinando in tutti i modi possibili i reali con il numero ***i*** si ottengono i numeri **complessi**. I numeri complessi posseggono la stessa quantità di elementi dei numeri reali.

Max Manfredi – *Zimbalom* 5' 06