La puntata si discosta tantissimo dallo scritto. Troppo per poter riannodare il discorso effettivo: va ascoltata!

Brano1 (dopo 22’) **Due minuti – Caraserena** + Brano2 (**manca**) **Bizarre love triangle - New order**

Brano3 (dopo 37’) **Ask – The Smits** + Brano4 **Ricatti esistenziali – Caraserena**

Brano5 (dopo 56’) (**manca**) **Franco Battiato - Non time no space** +

Brano7 (1h07) **Max Manfredi – Il treno per wuwuwok**

07/03/2011 - I fondamenti della geometria euclidea

Perché quest’argomento che sembra troppo tecnico e troppo scolastico a un tempo?

- ♥ Perché è una bella STORIA da raccontare (che la matematica sia una raccolta di belle storie mi piacerebbe che passasse!).
- ♥ Perché la geometria euclidea è una sorta di prototipo di **sistema logico-deduttivo** ed ha costituito una base culturale comune per tutte le persone che l’hanno studiata: una base che accomuna persone comuni e scienziati[1].

Ma incominciamo, Piji: che fa la matematica?

La matematica fa modelli

Un **modello** è una ricostruzione semplificata e artificiale di una situazione o un fenomeno reale, volta ad evidenziare unicamente gli aspetti ritenuti essenziali alla descrizione della situazione o alla risoluzione di problemi in essa definiti tralasciando ogni altro elemento che non risponda a tali requisiti.

Un modello può essere di tipo **materiale** -la riproduzione in scala di un edificio-, **simbolico** -la pianta dell’edificio-, **astratto** -l’insieme dei calcolo necessari a costruire l’edificio- o una combinazione di tali aspetti.

Carlo Dapueto *Progetto MaCoSa* Dipartimento di Matematica dell’Università di Genova (nel Quaderno del CNR: “Definire, argomentare, dimostrare nel biennio e nel triennio”)

“*Discipline* come la fisica, la linguistica, la storia, ... sono insiemi di conoscenze, di *modelli*, volti a ***razionalizzare*** una certa area di fenomeni. Esse impiegano ***linguaggi*** specializzati, ricorrendo a termini specifici nuovi o tratti dal linguaggio comune ma intesi con significati nuovi o più ristretti, a eventuali **simboli** particolari, a termini specifici e simboli tratti da altre discipline. [...] MA non sono solo una collezione di *modelli*: [studiano anche le] caratteristiche generali che accomunano modelli diversi e le ***relazioni*** fra modelli [ES Meccanica e Termodinamica in fisica]”

“A differenza di quanto accade per le discipline umanistiche o sociali, che si occupano di *fenomeni episodici o mutevoli o difficili da “misurare”*, nelle *scienze sperimentali* vengono studiati soprattutto fenomeni che si ripetono

[1] "*La filosofia naturale è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, io dico l'universo, ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in **lingua matematica**, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; ...*" Il Saggiatore, **Galileo Galilei** (1564-1642), fisico, astronomo, scrittore.

I primi due libri dell’opera più importante di Sir Isaac Newton: Philosophiae Naturalis **Principia** Mathematica (1686) sono: **Definizioni - Assiomi o Leggi del movimento**. Lo stesso tipo di struttura che adoperò Euclide per i primi suoi libri!

sistematicamente nel tempo; la differenza essenziale è, tuttavia, che *la validità dei modelli deve essere sempre confermata (con un certo grado di approssimazione) da verifiche sperimentali accurate e/o dedotta da altri modelli con ragionamenti svolti in modo* ***rigoroso***, cioè con passaggi argomentativi che "non lascino ombre di dubbio"..." O almeno ci provino con i mezzi di ragionamento che la nostra cultura ha eletto a più attendibili possibile.

"La ***matematica***, come le altre discipline, si sviluppa attraverso la messa a punto di modelli, lo studio di collegamenti che esistono fra modelli diversi, la definizione di una nomenclatura e una simbologia specifica,... MA a differenza di esse, non si occupa di una specifica area di fenomeni: i suoi modelli vengono applicati alle situazioni più diverse, spesso i modelli delle altre discipline sono ottenuti come arricchimento di modelli matematici, ... E *i modelli matematici* possono avere questa caratteristica di essere potenzialmente di *uso generale* in quanto vengono *definiti autonomamente, senza ricorrere a concetti e termini specifici e di altre discipline*"

Chi sa di filosofia può rendersi conto di come questa concezione della matematica si distingua nettamente da quelle di **Pitagora**, **Platone**, **Aristotele**, ma anche dello stesso **Kant**: dall'attribuire alla matematica lo status di VERITA', di ESSENZA, di A PRIORI.

Mi piacerebbe essere in grado di parlarne diffusamente perché trovo immensamente affascinante questo argomento. E qualche volta mi ci proverò, però mi rendo conto che non è il mio campo!

Scommetto che in molti l'idea che la matematica faccia modelli e che quindi sia uno strumento, utile, potente e bello quanto vi pare, ma pur sempre uno strumento! parrà riduttiva, eppure la storia del pensiero dell'uomo, come anche la storia individuale di molti di noi, scommetto, è fatta di enormi balzi in avanti che si compiono a partire dall'acquisizione di quella che potremmo chiamare un po' di umiltà...

La matematica fa modelli anche molto differenti fra loro: le branche della matematica sono tante e in continuo aggiornamenti, oltre che evoluzione. TORNIAMO A BOMBA: oggi parliamo della **geometria euclidea**.

Un po' di storia. Nella **Grecia Classica** (VI-IV sec a.C.), e come sarà per molti secoli [ancora per Galilei nei primi anni del 1600 d.C.!], la parola Matematica è sinonimo di **Geometria** (l'algebra è invenzione degli **Arabi** del **IX** sec. d.C. e inizia a diffondersi in occidente solo nel **XIV** sec.).

Pitagora (575-495 a.C.) e la sua scuola **pitagorica** furono i primi a proporre che l'Universo seguisse un disegno matematico e che attraverso la matematica, cioè la geometria, l'uomo potesse impadronirsi del segreto di tale disegno. Anche i numeri erano ritenuti da **Pitagora** in qualche modo geometrici: configurazioni di punti materiali (semplice individuare in questo convincimento le radici dell'atomismo di Leucippo –ca 440 a.C-. e Democrito –ca 460 a.C.-).

Interessante per questa sede osservare come i pitagorici riuscirono a ridurre la **musica** a semplici relazioni numeriche dopo aver scoperto due fatti:

1) il suono prodotto da una corda pizzicata dipende dalla lunghezza della corda (e dalla sua tensione)
2) i suoni armonici sono prodotti da corde, tese in egual modo, le cui lunghezze stanno tra loro come il rapporto di numeri naturali: 2/1 un'ottava, 3/2 una quinta, ecc...

Fino al periodo medievale *aritmetica*, *geometria*, *astronomia* e *musica* erano chiamate **arti del quadrivio**, a sottolineare la forte connessione esistente fra le quattro!

Ricordiamo **Socrate** (470-399 a.C.) per il ***principio di definizione*** ossia il principio in base al quale per introdurre un concetto nuovo, per definirlo, si devono descrivere le sue *caratteristiche peculiari* basandosi esclusivamente su *concetti già dati per acquisiti*; principio base di ogni scienza e, in particolare, della geometria (ma che oggi ha un significato molto differente dall'originale).

Dopo i Pitagorici, i più autorevoli sostenitori e propagatori della dottrina del disegno matematico della natura furono **Platone** (427-347 a.C.) e i suoi discepoli. Famoso il detto: "Dio geometrizza eternamente".

Interessantissimo la formulazione del **Problema astronomico di Platone**:

"*Le stelle, rappresentando oggetti eterni, divini e immutabili, si muovono con velocità uniforme attorno alla Terra, come noi possiamo constatare, e descrivono la più regolare e perfetta di tutte le traiettorie, quella della* ***circonferenza senza fine****. Il Sole, la Luna e i pianeti vagano invece attraverso il cielo e seguono cammini complessi, anche retrogradi. Tuttavia essendo anche loro corpi celesti, anch'essi debbono sicuramente muoversi in maniera conforme al loro rango elevato: i loro moti debbono perciò derivare da una qualche combinazione di cerchi perfetti. Quali sono le combinazioni di moti circolari uniformi che possono spiegare il loro [apparentemente] strano comportamento*?**"**

Aristotele (384-322 a.C.), benché discepolo di Platone, aveva un approccio all'indagine della realtà in qualche modo opposto. **Aristotele** infatti può essere considerato un **fisico** quanto Platone un **metafisico**. I suoi studi sul ragionamento deduttivo, in particolare sul **sillogismo**, diedero un contributo fondamentale.

Euclide, che dà il nome, non del tutto propriamente, alla geometria di cui parliamo oggi. vive ad Alessandria d'Egitto intorno al 300 a.C. ed è l'autore del "più fortunato manuale di matematica che sia mai stato scritto"[2]: Gli ***Elementi***.

Dare una scorsa alla **struttura** degli Elementi offre spunti interessanti di riflessione. Questi sono suddivisi in 13 libri. Il primo libro inizia con un elenco di 23 **definizioni** che hanno caratteristiche affatto differenti da quelle che oggi noi riteniamo tali (da notare come anche Newton apra i suoi Principia con un libro di definizioni!). Dopo le definizioni Euclide elenca 5 **postulati** e 5 **assiomi** (anche Newton procederà così). Interessante notare come il libro dedicato alla risoluzione che oggi chiamiamo **equazioni**, avesse anch'esso un impianto geometrico: i Greci risolvevano le equazioni servendosi di costruzioni geometriche, infatti!

Quello che *dovrebbero*[3] studiare gli studenti di oggi è è una riorganizzazione, anche piuttosto radicale, dell'opera di Euclide portata a termine da **David Hilbert** nel 1899 (summa di un lavoro intrapreso da molti, italiani anche. Nessuno ha raggiunto la popolarità e perfezione del lavoro di **Hilbert**) e a sua volta innestata di

---

[2] Carl Boyer, ***Storia della matematica***, Mondadori. Boyer sostiene che gli Elementi fossero un manuale introduttivo alla matematica elementare del tempo e non un compendio della matematica conosciuta, come altri autori affermano.

[3] Dal punto di vista formativo la geometria, o meglio la risoluzione dei problemi d i geometria, ha una funzione analoga a quella delle versioni di latino: promuove infatti la sinergia fra analisi e sintesi. Notevole anche il contributo all'affinamento del linguaggio che deriva già solo dal dedicarsi adeguatamente alle definizioni. Le dimostrazioni poi dovrebbero far comprendere la differenza fra retorica e ragionamento logico deduttivo...

elementi di bourbakismo (Nicolas Bourbaki è lo pseudonimo di un collettivo di matematici perlopiù francesi che opera fra il 1935-1986).

Il motivo di tale riorganizzazione avrei voluto tanto raccontarlo ma è veramente un po' complesso e mi sono anche resa conto di non averne chiarissimi un paio di aspetti fondamentali!!! Magari studio un po' di più e ne riparliamo...

Definire e Dimostrare

La modellistica matematica si fonda su due caratteristiche essenziali (mi riferisco come esempio al modello di un **oggetto** concreto):

- **astrazione**: ci si *allontana* dal singolo oggetto concreto per *conoscerlo meglio*: se ne ricercano elementi caratteristici e generali sia di tipo geometrico (forme) sia aritmetico (misure) con lo scopo di giungere all'*essenza* dell'oggetto stesso.
- **precisione**: perché l'astrazione continui però a corrispondere all'oggetto di partenza dovrà registrare con estrema cura e quelli che abbiamo chiamato *elementi caratteristici* dell'oggetto. Pensa ad esempio alla precisione necessaria per distinguere il modello di un DIARIO da quello *confondibile* di un LIBRO!

Mentre conosci già abbastanza bene l'aspetto astratto della matematica: il suo servirsi di oggetti e concetti ideali (le forme geometriche ma anche i numeri) credo ti sia meno familiare in che modo si realizza la **precisione** in matematica.

La ricerca della precisione si articola in due attività: **DEFINIRE** e **DIMOSTRARE**.

DEFINIRE un **sostantivo**, un **aggettivo** o un **verbo**, matematico significa: illustrarne le caratteristiche essenziali e peculiari, gli aspetti che lo caratterizzano rendendolo quel che è, e differente da ciò che non è, **utilizzando unicamente parole già definite**[4] e il minor numero di parole possibili (c'è anche un'attenzione all'*eleganza*, oltre che all'*economicità*!).

DEF In tal modo s'innesca un *procedimento a ritroso*. In questo, si scopre presto di dover giungere all'individuazione di parole sulle quali basare la definizione di tutte le altre: **sostantivi**, **aggettivi** e **verbi FONDAMENTALI**.

Individuiamo in: **punto**, **retta**, **piano**[5], **insieme** i sostantivi fondamentali, in: **continuo** l'aggettivo fondamentale e in: **appartenere**[6] (un punto ad una retta, una retta ad un piano, ecc.) e **essere coincidenti** (di figure) e effettuare un **movimento rigido**, i verbi fondamentali, su cui basare le definizioni.

Ogni **sostantivo**, **aggettivo** o **verbo**, matematico va **DEF** correttamente alfine di:

- associare ad ogni parola l'esatto concetto corrispondente, quindi:
    - o **nominare** (dare nome) ai nuovi oggetti che si incontrano
    - o **comprendere meglio**[7] il significato delle parole matematiche
    - o **sintetizzare**: la parola definita sostituisce la definizione

[4] Osserva invece come nelle definizioni del dizionario quest'accortezza non viene quasi mai seguita

[5] Ha senso considerarlo come elemento fondamentale se si fa la geometria dello spazio euclideo: nella geometria piana è "solo" il luogo ove vengono collocati gli altri oggetti matematici!

[6] O, specularmente, **passare per**; una retta per un punto, un piano per una retta, ecc...

[7] Associare ad ogni parola la corrispondente **immagine mentale** senza ambiguità, fornendo a un tempo gli strumenti per metterla in relazione con le altre immagini mentali *già formate*.

- poter **operare** correttamente con sostantivi, aggettivi e verbi: ad esempio per risolvere un problema riguardante un *quadrato* può essere fondamentale sapere che ha sia lati sia angoli uguali.
- cominciare ad effettuare le prime **deduzioni** sugli oggetti: pensa a come le proprietà delle potenze derivino quasi direttamente dalla DEF di potenza stessa

N.B.: D'ora innanzi indicherò per brevità, ove possibile, l'insieme di: sostantivi, aggettivi e verbi matematici con la locuzione generica di: **OGGETTI MATEMATICI**.

DIMOSTRARE (**DIM**) è un'attività che si riferisce a **proprietà** e **teoremi** riguardanti oggetti matematici Partiamo da alcuni esempi (**ES**): "**se** sommo le ampiezze degli angoli interni di un triangolo ottengo un angolo piatto", "**se e solo** se un quadrilatero è un rettangolo, le sue diagonali sono uguali e si bisecano scambievolmente in parti uguali", "**esiste** un solo punto che divide un segmento in due parti uguali".

Tutte queste frasi sono **teoremi** (**THM**). Nella prima si possono distinguere una premessa e una conseguenza: un'**ipotesi** (**HIP**) e una **tesi** (**TH**), già dalla costruzione della frase: **se**... **allora**...(allora è sottinteso); nella seconda quel "**se e solo se**" ci dice che ***ipotesi*** e ***tesi*** sono intercambiabili: ci sono due proposizioni in una[8]; nella terza l'***ipotesi*** è sottintesa: "dati un segmento e considerati gli infiniti punti ad esso appartenente...".

DEF: I **teoremi** sono *proposizioni* da ***dimostrare***

Che vuol dire **dimostrare**? Vuol dire (**DEF**): costruire sequenza di proposizioni ciascuna delle quali sia: un assioma; un postulato; un'ipotesi; una definizione; un teorema e l'ultima delle quali sia la **tesi** da dimostrare

La possibilità di passare da un anello all'anello successivo è stabilita da regole precise dette: *regole di derivazione logica* o *regole di inferenza*, la definizione delle quali esula dalle possibilità di una quinta ginnasio ma che, viste in azione, nessuno di voi credo discuterà.

DEF Come il definire si basa su parole già definite, il dimostrare *si basa su proprietà già dimostrate*. Procedendo a ritroso, si giunge all'individuazione *proprietà fondamentali*: sulle quali basare la dimostrazione di tutte le altre: gli **assiomi** dell'uguaglianza e i **postulati geometrici**: Leggili alle pagg. 6-7.

- Teoremi, proprietà e corollari ampliano e approfondiscono l'elenco delle caratteristiche degli *oggetti matematici* fornito dalle definizioni e danno indicazioni su cosa ***si può fare*** con questi. Postulati e assiomi svolgono lo stesso compito ma in relazione agli *oggetti matematici fondamentali*.

- La dimostrazione di un teorema è l'attività matematica che maggiormente si lega alla **ricerca della precisione**: una dimostrazione infatti attesta che la proposizione contenuta nel teorema è una *conseguenza logica* dell'ipotesi, della premessa.

- Spesso la tesi è convincente in sé: ci dà un'informazione cui non abbiamo alcun problema a credere. La dimostrazione non serve infatti a convincerci della veridicità di una proposizione ma a garantire che si ***inserisca coerentemente*** all'interno del modello in cui è stata fatta.. Cerco di spiegarti meglio cosa intendo mediante alcuni riferimenti storici:

[8] "Se un quadrilatero è rettangolo, allora questo ha le diagonali uguali che..." ma anche: "Se le diagonali di un quadrilatero sono uguali e... allora questo è un rettangolo"

DEF Un insieme di proposizioni si dice **teoria**

DEF Una **teoria** si dice ***coerente*** se al suo interno, cioè mediante le proposizioni in essa contenute, non si riesce a dimostrare una proposizione **A** e il suo contrario: ***non*A**.

L'esigenza di "dimostrare tutto" è emersa infatti proprio in un momento storico, la fine del 1800, in cui alcune **teorie** sono entrate fortemente in crisi a causa dell'emergere di contraddizioni: la teoria degli insiemi, in particolare.

Sempre nello stesso periodo dall'ennesimo tentativo di dimostrare[9] il *postulato delle rette parallele* (**V Postulato**), sono nate nuove geometrie dette ***non euclidee***, anch'esse *logicamente valide*, cioè coerenti, che hanno rivoluzionato la concezione della matematica.

Una di queste, la **geometria ellittica di Riemann** è molto semplice da comprendere nelle sue linee base: gli **elementi fondamentali** sono: il punto, la superficie sferica (modello della superficie terrestre!) e i cerchi massimi (i meridiani!). Converrai che in questa geometria non esistono rette parallele: tutte le rette si incontrano infatti ai Poli...

Questi sconvolgimenti hanno portato i matematici ad esercitare, per le costruzioni matematiche successive, un controllo ferreo mediante dimostrazioni rigorose.

- Infine, ma non meno importante, una dimostrazione ci informa sulle **connessioni** esistenti fra la proposizione dimostrata e le altre proposizioni contenute all'interno del modello, quindi sulle conseguenze che tale affermazione potrà avere e quindi anche sui teoremi che da essa potranno derivare.

[9] Tentativo intrapreso per primo dallo stesso Euclide che lo considerava troppo articolato per essere considerato un vero e proprio postulato e proseguito dai maggiori matematici di tutte le epoche, senza successo.

Lo schema seguente riassume quanto detto fin qui:

Schematizzando la geometria euclidea nel modo seguente si capisce meglio in che senso l'ho chiamata ***struttura***: credo si veda abbastanza chiaramente infatti in che modo le attività che abbiamo analizzato singolarmente, cioè **definire** e **dimostrare**, agiscano insieme, collaborino all'attività di modellizzazione della realtà (anche interna alla matematica stessa) nel senso già specificato nelle pagine precedenti.

Ovviamente potresti obiettare che le forme che ci circondano sono tutte solide: la geometria piana è veramente molto astratta. Questo è vero: la geometria piana fornisce modelli per rappresentare le proiezioni o le sezioni delle forme "reali", o al più le superfici.

Spero che riusciremo ad affrontare anche qualche argomento di geometria solida!

OGGETTI fondamentali (punto, retta, piano, insieme – continuità - appartenenza, incidenza, congruenza, ordine)	**hanno le seguenti proprietà**: →	**Postulati e Assiomi** (Sono gli anelli fondamentali delle catene dimostrative dei primi teoremi)
↓ servono per:		↓ servono per:
DEFINIRE (precisare le caratteristiche peculiari di cui vorremmo che godano gli oggetti, utilizzando parole **già definite**)		**DIMOSTRARE** (Costruire catene di proposizioni, ciascuna già dimostrata e ***conseguenti*** le une alle altre, che abbia come primo anello l'ipotesi e come ultimo la tesi e come anelli intermedi postulati, assiomi o teoremi già dimostrati)
↓ cosa		↓ cosa:
OGGETTI **SOSTANTIVI** (poligoni, angoli, ecc), **AGGETTIVI** (uguaglianza, similitudine, equivalenza, ecc...) e **VERBI** (addizionare, sottrarre, trasformare, ecc)	**riguardano** ←	**TEOREMI** (proprietà degli oggetti matematici. Sono composti di una premessa, o ipotesi, e di una conclusione, o tesi)

ES di DEF: il Poligono - ASSIOMI e POSTULATI - ES di DIM: THM di Pitagora

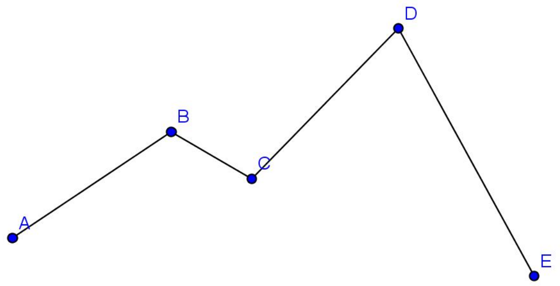
DEF Dati due punti distinti A e B di una retta ***r*** si dice **segmento** AB il sottoinsieme continuo di *r* costituito da A, B e dai punti compresi fra A e B. A e B si dicono *estremi* di AB

DEF dato un insieme **A** (gli insiemi si indicano con lettere in corsivo maiuscolo) diremo che l'insieme **B** è **sottoinsieme** di **A** e lo indicheremo con il simbolo **B**$\subseteq$**A** se ogni elemento di **B** è anche elemento di **A**. In simboli: $\forall b \in B \Rightarrow b \in A$. Se esiste un elemento di **A** che non è elemento di **B** (in simboli: $\exists a \in A, a \notin B$) si dirà che **B** è un **sottoinsieme proprio** ed il simbolo più appropriato sarà: $\subset$ (ma utilizzare l'altro non costituisce errore). Ovviamente in caso contrario **B** coincide con **A**.

DEF Due **segmenti** che hanno in comune un estremo e solo quello si dicono **consecutivi** (sa hanno in comune oltre all'estremo un altro punto saranno coincidenti)

DEF Due **segmenti** *consecutivi* che appartengono alla stessa retta si dicono **adiacenti**

DEF Più segmenti a due a due consecutivi e <u>non</u> adiacenti costituiscono una **poligonale**



DEF I segmenti AB, BC, CD DE si dicono **lati** ed i punti A, B, C, D, E i **vertici** della poligonale. In particolare i vertici A ed E, che appartengono a singoli segmenti: non sono in comune, sono gli **estremi** della poligonale. Se gli estremi coincidono la **poligonale** si dice **chiusa**, se sono distinti **aperta**. Quando due lati <u>non consecutivi</u> hanno un punto in comune, non gli estremi della poligonale, la poligonale si dice **intrecciata**.

DEF Un sottoinsieme del piano cartesiano viene chiamato **figura piana**

DEF Poligono è una *figura piana continua* delimitata da una poligonale chiusa <u>non</u> intrecciata.

DEF Due figure si dicono **congruenti**[10] quando con un movimento rigido è possibile portare una di esse a *coincidere punto per punto con l'altra*.

Assiomi dell'uguaglianza

Per l'uguaglianza valgono le seguenti proprietà (valide anche per: parallelismo, congruenza e equivalenza: prova a sostituire al simbolo di = ciascuno dei precedenti e vedrai)

Proprietà **riflessiva** (nel senso dello specchio): per ogni elemento A vale cioè A=A

Proprietà **simmetrica** (importante per le equazioni): se è vero A=B allora è vero anche: B=A

Proprietà **transitiva** : se A=B e B=C allora anche: A=C

E la proprietà **invariantiva** (importantissima per risolvere le equazioni e valida solo dove abbia senso definire addizione e sottrazione, quindi <u>non</u> il parallelismo)

Data un'uguaglianza vera: A=B saranno vere anche le seguenti eguaglianze che saranno dette equivalenti ad A=B:

A+C=B+C ; A-C=B-C ; AC=BC ; $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$

Per convincertene pensa l'uguaglianza come l'equilibrio di una bilancia a due piatti.

Postulati della geometria piana

I postulato Dati due punti distinti A e B, esiste una ed una sola retta passante per essi

[10] Assumiamo la convenzione che una figura sia uguale solo a sé stessa

Cor Due rette <u>distinte</u> non possono avere più di un punto in comune

II postulato Ogni retta *r* è un insieme *continuo* e *ordinato*[11] di punti. Tale che[12]:

- presi su *r* due punti distinti A e B esiste sempre un punto C di *r* fra essi compreso (ES: se A < B allora sarà A < C < B)
- preso su *r* un punto C, esisteranno sempre due punti A e B di r fra i quali C è compreso.

Cor 1 Fra due punti A e B di *r* sono compresi infiniti punti appartenenti ad *r*

Cor 2 Ogni punto C di una retta *r* è preceduto e seguito da infiniti punti di *r*

Cor 3 Ogni retta è un <u>insieme infinito</u> di punti

III postulato Dato un punto P del piano, esistono rette che non lo contengono

Cor 1 Esistono infinite terne di punti non allineati

Cor 2 per ogni punto passano infinite rette

Cor 3 Esistono infiniti punti non appartenenti ad un'assegnata retta *r*

IV postulato Date due rette orientate *r* ed *s* e due loro punti A (di *r*) e B (di *s*) esistono due movimenti rigidi che portano *r* a coincidere con *s*, con A su B: l'uno fa coincidere le due orientazioni, l'altro le dispone in senso opposto.

Cor Tutte le rette sono uguali

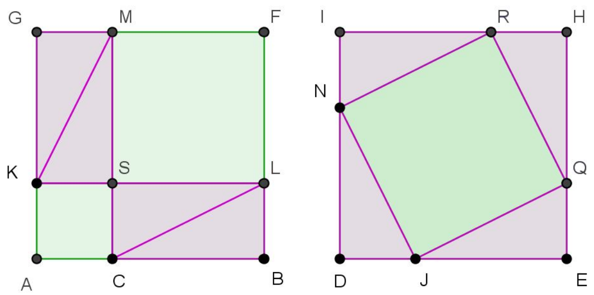
<u>**V postulato**</u> Data una retta *r* ed un punto P esterno ad essa esiste una ed una sola retta ***s*** passante per P e non avente nessun punto in comune con la retta *s*

DEF Due **rette** del piano si dicono **parallele** se coincidono oppure se non hanno nessun punto in comune

Cor Data una retta *r* ed un punto P del piano (appartenente o no ad *r*), per P si può condurre una ed una sola retta *s* parallela ad *r*

Teorema di Pitagora: "*In un triangolo rettangolo* (HIP), <u>il quadrato costruito sull'ipotenusa è **equivalente**</u> (stessa area) <u>alla somma dei quadrati costruiti sui cateti</u> (TH)".

L'enunciato di questo teorema, come di quasi tutti i teoremi geometrici, può essere *affiancato* da un disegno. Misura la lunghezza dei cateti GM GK del disegno seguente e disegna un triangolo rettangolo ABC congruente a GKM sul quale **rappresenta il teorema.**



Il quadrato costruito sul cateto minore dovrà essere congruente a ACSK, il quadrato costruito sul cateto maggiore dovrà essere congruente a SLFM ed il quadrato costruito sull'ipotenusa dovrà essere congruente a JQRN.

DIM I quadrati ABFG e DEHI sono congruenti → Il quadrato JQRN si può ottenere sottraendo da DEHI 4 triangoli tutti congruenti al triangolo ABC → Ma anche la somma fra i quadrati ACSK e SLFM si può ottenere sottraendo da ABFG, congruente a DEHI, 4 triangoli congruenti ad ABC. → Dalla **proprietà invariantiva** dell'uguaglianza (o dell'equivalenza) la tesi: $A_{JQRN} = A_{ACSK} + A_{SLFM}$ (o: JQRN ≡ ACSK+SLFM attenzione ai simboli!).

In che modo viene utilizzata l'ipotesi che dovrebbe essere il *primo anello della catena dimostrativa*? Proprio per i disegni qui sopra: se ABC <u>non</u> fosse rettangolo potresti farli?

[11] Dati due punti distinti A e B di essi si può individuare quale precede l'altro: o A < B o A > B.

[12] Segue DEF della ***densità*** di *r* che è un concetto *più debole* della continuità ma più facile da definire