Schema per lo studio del segno di una funzione algebrica irrazionale intera del tipo $f_1(x) = \sqrt{A(x)} + B(x)$

A(x) e B(x) sono **funzioni polinomiali**.

Premessa: il cuore del lavoro sulle **funzioni** (e i loro grafici) consiste in questi fatti:

I. Vogliamo ***informazioni quantitative*** su delle grandezze *y* (fisiche, economiche, biologiche).

II. I valori di queste grandezze *y*, dipendono dai valori di *altre grandezze*: le *x* (tempo, posizione, velocità, densità, numero di pezzi venduti, ecc). *y=f(x)* significa quanto ho appena detto. Le ***y*** sono *variabili dipendenti* dalle ***x*** che, invece, sono dette *variabili indipendenti*, ricordi?

III. Vogliamo arrivare a sapere *quanto più possibile* di queste *y*. Per cominciare: per quale intervallo di valori delle *x*, le *y corrispondenti* sono **numeri reali** e per quale intervallo di valori delle *x*, le *y* sono *corrispondenti* **positive** (o nulle o negative). Più avanti cercheremo anche altro.

IV. Tutte le fasi di ricerca di queste *informazioni quantitative* sono **domande sulle *y*** le **risposte** alle quali **riguardano le x**, perché tutto quello che *succede* alle *y dipende* dalle *x*, se *y=f(x)*.

V. I **passaggi** che consentono di avere risposta a tali domande sono basati su: *principi di equivalenza* (delle equazioni e delle disequazioni), *legge di annullamento del prodotto*, formule di *risoluzione* delle *equazioni di secondo grado* (frutto di applicazioni dei principi suddetti), *prodotti notevoli*, relazione tra ascisse e ordinate di una *parabola* (risoluzione disequazioni di II grado), *principio fondamentale della geometria analitica*. Tutte cose che DEVI sapere già.

Di seguito proverò a esplicitare di volta in volta **queste domande** e le **relative risposte**. Mi riferirò alla funzione $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x+1} - x + 1}$ come esempio.

1) determinazione dell'insieme di definizione (I.D.)

L' I.D. di una funzione, finché usiamo come *x* e come *y numeri reali*, è l'insieme di valori delle *x* cui corrispondono *y* che sono numeri reali.

L'I.D. di $f_1(x)$ è l'insieme delle *x* che rendono **positivo** (o nullo) il radicando $A(x)$. Il radicando di una radice di *indice pari*, infatti, deve essere positivo o nullo, affinché la radice sia un numero **reale**.

Ci chiediamo dunque: per quali intervalli di valori delle *x* il radicando A(x) è positivo o nullo?

Tecnicamente si tratta di risolvere la disequazione: $A(x) \geq 0$.

Nel nostro esempio: $x + 1 \geq 0$. Applicando il *principio di equivalenza per le disequazioni*, la risposta è: $x \geq -1$.

Il radicando $A(x)$ è positivo o nullo solo e soltanto per *valori di x maggiori* o uguali a -1. Quindi abbiamo valori reali di $f(x)$ solo se le *x* appartengono al seguente: **I.D.**=[−1;+∞).

Quanto vale $f(x)$ in -1 lo calcoliamo *a mano*, sostituendo in tutte le *occorrenze* di *x* il valore 1: $f(-1) = \sqrt{1-1} + 1 + 1 = 2$. Calcoliamo *a mano* anche $f(0) = \sqrt{0+1} - 0 + 1 = 2$.

Perché calcoliamo a mano questi valori? Perché stiamo cercando tutte le informazioni possibili su $f_1(x)$ e vogliamo arrivare a tracciarne un **grafico**, *via via* sempre più dettagliato.

Per orientarti al meglio in quanto segue, ti consiglio di rappresentare subito graficamente le informazioni che ottieni.

	-1		**0**
$f(x)$	2		2

2) scrittura della disequazione associata e isolamento al primo membro di un solo radicale (con segno positivo davanti)

Dopo aver costruito il *terreno di gioco*, iniziamo a *giocare*: vogliamo **studiare** il **segno** della **nostra funzione** $f(x)$. La domanda che ci poniamo è: per quali *intervalli di valori delle x,* i corrispondenti *valori* $f(x)$ sono positivi o nulli? *Dove* non saranno positivi o nulli, saranno negativi.

Tecnicamente si tratta di risolvere la disequazione: $\sqrt{A(x)} + B(x) \geq 0$. Che, per il principio di equivalenza delle disequazioni, è equivalente a: $\sqrt{A(x)} \geq -B(x)$

Nel nostro esempio: $\sqrt{x+1} - x + 1 \geq 0$ è equivalente a: $\sqrt{x+1} \geq x - 1$. A questo punto si apre un bivio:

• per quei valori delle *x* che rendono **negativo** il secondo membro la disequazione è verificata in quanto un valore positivo ($\sqrt{A(x)}$) è sempre maggiore di un valore negativo.	• per quei valori delle *x* che rendono **positivo** il secondo membro, si sfrutta di nuovo il principio di equivalenza delle disequazioni; in particolare il fatto che, sse *a* e *b* sono *entrambi* positivi: $a > b \Longrightarrow a^2 > b^2$

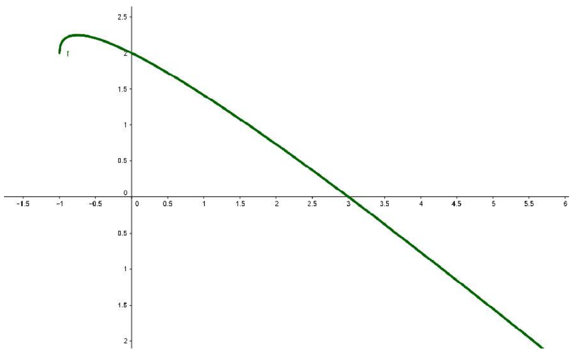
Vediamolo applicato al nostro esempio

3) studio del segno del secondo membro e risoluzione immediata per quegli intervalli dell'ID in cui il primo membro è positivo e il secondo membro è negativo	**4) elevamento al quadrato di entrambi i membri e risoluzione della disequazione che ne deriva.**
$x - 1 < 0 \Longrightarrow x < 1$ (1 appartiene all'I.D.: importante controllare questo fatto)	$x - 1 > 0 \Longrightarrow x > 1$
$\sqrt{x+1} > x - 1$ verificata, quindi (a ritroso): $\sqrt{x+1} - x + 1 > 0$ verificata, quindi: $f(x)$ **positiva** A pag 3 ti mostrerò come, con questa funzione, questo passaggio non si può evitare (non è contenuto in quello illustrato nella colonna a destra) a meno di commettere un errore.	Nella $\sqrt{x+1} \geq x - 1$ i membri sono entrambi positivi perciò se li eleviamo al quadrato otteniamo una *disequazione equivalente*: $x + 1 \geq (x-1)^2 \Longrightarrow x + 1 \geq x^2 - 2x + 1$ *Princ. equiv.* $0 \geq x^2 - 2x - x + 1 - 1$ *Calcoli* $0 \geq x^2 - 3x$ $a > b \Leftrightarrow b > a$ $x^2 - 3x \leq 0$ *a>0, segno ≤, diseq verificata per* $0 \leq x \leq 3$ Cioè per $1 < x \leq 3$ perché sto lavorando nell'intervallo $(1; +\infty)$

Attenzione: esaminiamo il risultato della colonna di destra: la domanda era: per quali intervalli di valori delle *x,* i corrispondenti *valori* $f(x)$ sono positivi o nulli? Facendo **passaggi** che trasformavano la mia disequazione originaria ($\sqrt{x+1} - x + 1 \geq 0$) in *disequazioni equivalenti*, ho ottenuto la risposta: *per x compreso tra 1 (escluso) e 3 (incluso)*. Quindi $f(x) \geq 0$ se $1 < x \leq 3$.

Quanto vale $f(x)$ in **1** lo calcoliamo *a mano*, sostituendo in tutte le *occorrenze* di *x* il valore 1: $f_1(1) = \sqrt{1+1} - 1 + 1 = \sqrt{2}$. Mettiamo ora tutti assieme i risultati ottenuti:

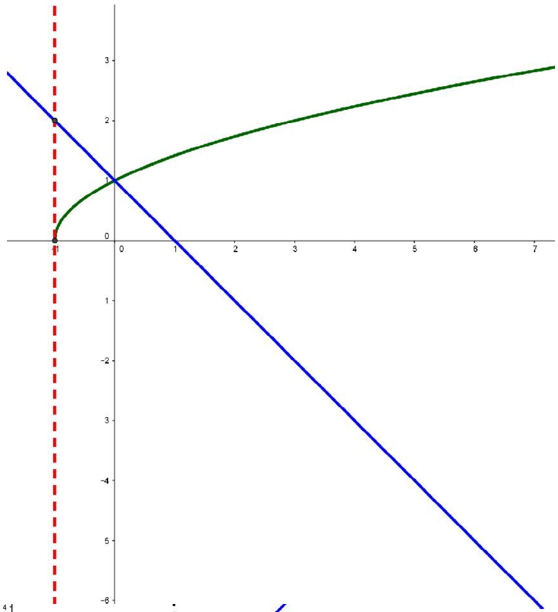
	-1		**0**	**1**		**3**	
$f(x)$	**2**	**+**	**2**	$\sqrt{2}$	**+**	**0**	**−**



Approccio grafico (facoltativo solo fino a Natale)

$$f_1(x) = \sqrt{x+1} - x + 1$$

La funzione $f_1(x)$ può essere considerata come la *somma* delle funzioni $g(x) = \sqrt{x+1}$ e $h(x) = -x + 1$. Perciò il grafico di $f(x)$ può essere ottenuto, *punto per punto* come **somma** dei grafici di $g(x)$ e di $h(x)$ (che dovresti saper rappresentare: il primo usando il *metodo della tabella* e il secondo, le tue conoscenze sulle rette).

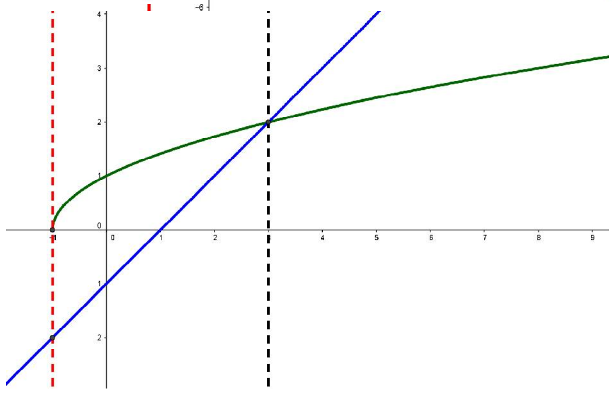


L'I.D. di $f_1(x)$ è dato dall'intersezione tra l'I.D. di $g_1(x)$ e l'I.D. di $h_1(x)$ e cioè **$[-1;+\infty)$**.

Dal grafico dovresti vedere che per $x \in [-1; 1]$ la **somma** dei valori di $g_1(x)$ e di $h_1(x)$ è **positiva** perché le ordinate dei punti dei grafici, corrispondenti alla stessa ascissa, sono entrambe positive o una nulla e l'altra positiva. Il segno di $f_1(x)$ diviene non chiaro per $x \in (+1; +\infty)$.

Per cui dobbiamo ricorrere a quanto sapevamo già dall'approccio algebrico: lo studio del segno di $f_1(x)$ corrisponde alla risoluzione della disequazione: $\sqrt{x+1} - x + 1 \geq 0$ e questa è equivalente alla: $\sqrt{x+1} \geq x - 1$. Graficamente la disequazione $\sqrt{x+1} \geq x - 1$ corrisponde al *confronto* tra i grafici di $g_1(x)$ e $-h_1(x)$.

D'ora in poi, per non appesantire il linguaggio, non distinguerò più funzioni e loro grafici.



Questo confronto conferma quanto già avevamo visto per $x \in [-1; 1]$ e ci dà informazioni in più. Infatti: per $x \in [-1; 3)$, $g_1(x) > -h_1(x)$ perciò $f_1(x)$ è **positiva**; per *x=3* $g_1(x) = -h_1(x)$ perciò $f_1(x)$ è **nulla** (infatti: $f_1(3) = \sqrt{3+1} - 3 + 1 = 2 - 2 = 0$); per $x \in (+3; +\infty)$. $g_1(x) < -h_1(x)$ perciò $f_1(x)$ è **negativa**. Lo stesso risultato ottenuto facendo i conti.

Certo non è sempre desumibile tutto così chiaramente dai grafici, come accade in questo esempio. Però saper integrare i due approcci è utile e necessario (*formula di cortesia...*).

L'approccio grafico ci dà modo anche di convincerci della necessità del **passaggio 3** dello studio algebrico: se non distinguessimo il caso *x>1* (quadrato di entrambi i membri) dal caso *x<1* (immediato), ma cercassimo di risolvere tutto applicando il **passaggio 4** otterremmo un risultato errato, e cioè che $f(x)$ è **negativa** per *x<0*. Come mai?

Perché, per $-1 < x < 0 \Longrightarrow 0 < g(x) < 1; -2 < -h_1(x) < -1$. E osserva cosa accade alla **disuguaglianza vera** $\frac{1}{2} > -\frac{3}{2}$ *se elevi al quadrato entrambi i valori*. Diventa: $\frac{1}{4} > \frac{9}{4}$ che è **falsa**! Come detto più volte a lezione, se entrambi i membri di una disuguaglianza non sono positivi, elevandoli al quadrato si rischia di far diventare vero qualcosa di falso e viceversa.

Ovviamente quanto contenuto in questo BOX non è una dimostrazione ma solo un contresempio. Dovrebbe bastare però a convincervi della necessità del **passaggio 3**.