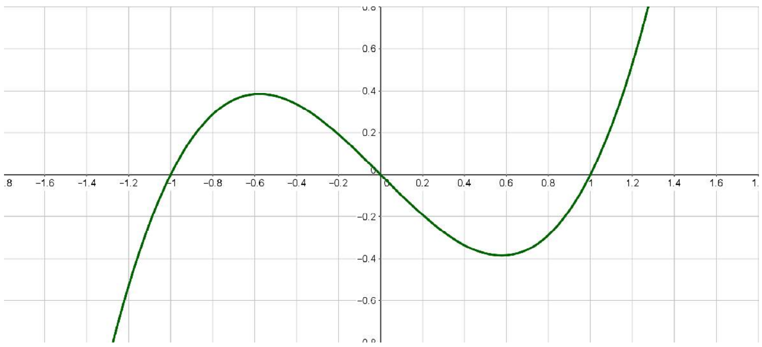
Funzioni polinomiali di grado superiore al secondo.

Sinora abbiamo lavorato con **funzioni polinomiali di primo e secondo grado** e con i loro grafici: **rette** e **parabole**. Quest'anno lavoreremo con **funzioni polinomiali** di grado superiore al secondo.

Cominciamo con qualche **esempio** di funzione e di **grafico** corrispondente, tracciato con Geogebra[1]:

ES1 $\boldsymbol{f(x) = x^3 - x}$ (funzione di terzo grado, o cubica)



Confrontiamo le *informazioni* che ci dà il **grafico** (supponendo che non vi siano altre *onde* nelle parti di piano che non vediamo), con le *informazioni* che ci dà l'equazione.

$f(x)$	Grafico	Equazione
Simmetrie (eventuali)	Simmetrico rispetto all'origine del sistema di riferimento	*f(−x)=−f(x)*, infatti: $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$
Intervalli di *valori di x* cui corrispondono *valori di y* **positivi**	$-1 < x < 0 \vee x > 1$	Scomponendo il secondo membro dell'equazione rappresentativa di *f(x)*, si ha: $f(x) = x(x-1)(x+1)$. Il *segno* di *f(x)* si ha moltiplicando il *segno* dei fattori al secondo membro (il segno di questi fattori si ha risolvendo disequazioni, o *a occhio*). Il **prodotto** dei segni si fa graficamente:
Intervalli di *valori di x* cui corrispondono *valori di y* **negativi**	$x < -1 \vee 0 < x < 1$	
Intersezioni del grafico con l'*asse x*	$(-1;0)$ $(0;0)$ $(1;0)$	
Intersezione del grafico con l'*asse y*	(0;0)	*f(0)*=0^3-0=0 perciò il punto di coordinate (0;0)

valori delle x			*−1*		*0*		*1*	
segni dei fattori al secondo membro	*x*	−	−	−	0	+	+	+
	x−1	−	−	−	−	−	0	+
	x+1	−	0	+	+	+	+	+
segno di f(x)	*y*	−	**0**	+	**0**	−	**0**	+

Osservazione: nello scomporre un polinomio per studiarne il *segno*, non è necessario arrivare ai fattori primi (quelli non più scomponibili). Per esempio, riguardo a *f(x)*, potresti anche usare la scomposizione:

$f(x) = x(x^2-1)$. Lo studio del segno diverrebbe →

valori delle x			*−1*		*0*		*1*	
segni dei fattori al secondo membro	*x*	−	−	−	0	+	+	+
	x²−1	+++	0	−	−	−	0	+
segno di f(x)	*y*	−	**0**	+	**0**	−	**0**	+

A pag. 5 puoi vedere una rappresentazione del segno di *f(x)* sul piano cartesiano.

Attenzione: non tutte le cubiche sono **simmetriche** rispetto all'origine e non tutte **passano** per l'**origine**. Negli esercizi che seguono avrai esempi di funzioni che non godono di queste caratteristiche.

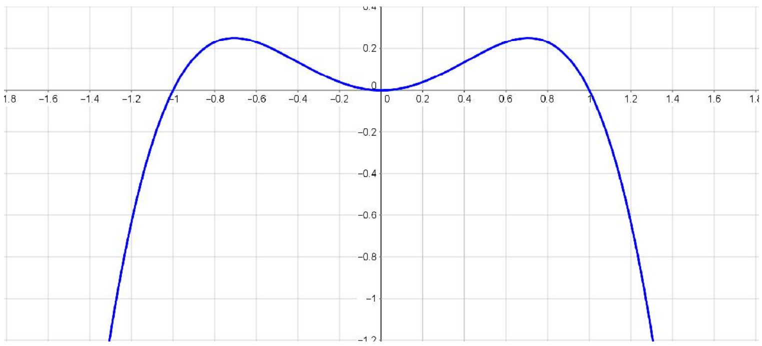
EX1 Prova ad esercitarti con le funzioni: $g(x) = x^3 + 1$ e $h(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$. Non fare subito il grafico con Geogebra: prima fai lo *studio* del *segno* e prova a rappresentarlo sul piano cartesiano.

EX2 Applica a *f(x)* una **traslazione** di vettore (1;1) e vedi cosa succede. Secondo te è possibile che il grafico di una cubica non abbia intersezioni con l'*asse x*? E con l'*asse y*? Argomenta le tue affermazioni.

EX3 Scrivi l'equazione della simmetrica di *f(x)* rispetto all'*asse x*. Secondo te è possibile che il grafico di una cubica abbia tutti i punti con ordinate solo positive o solo negative? Argomenta le tue affermazioni.

[1] Se non puoi o non vuoi scaricare sul tuo PC il software (gratuito) Geogebra, potrai ottenere i grafici tracciati con cui lavorare sul sito: www.wolframalpha.com/ o con siti che offrono lo stesso servizio.

ES2 $q(x) = -x^4 + x^2$ (funzione di quarto grado, o quartica)



Confrontiamo le *informazioni* che ci dà il **grafico** (supponendo che non vi siano altre *onde* nelle parti di piano che non vediamo), con le informazioni che ci dà l'equazione.

<table>
<tr><th>$f(x)$</th><th>Grafico</th><th>Equazione</th></tr>
<tr><td>Simmetrie (eventuali)</td><td>Simmetrico rispetto all'asse y</td><td>q(−x)=q(x), infatti:
$q(-x) = -(-x)^4 + (-x)^2 = -x^4 + x^2$</td></tr>
<tr><td>Intervalli di valori di x cui corrispondono valori di y positivi</td><td>$-1 < x < 0 \cup 0 < x < 1$</td><td rowspan="3">Scomponendo il secondo membro dell'equazione rappresentativa di q(x), si ha: $q(x) = x^2(1-x)(1+x)$. Il segno di q(x) si ha moltiplicando il segno dei fattori al secondo membro. Il prodotto dei segni si fa graficamente, come prima:
<table>
<tr><td>valori delle x</td><td></td><td></td><td>−1</td><td></td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">segni dei fattori al secondo membro</td><td>x^2</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>1-x</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td></tr>
<tr><td>x+1</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>segno di f(x)</td><td>y</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Intervalli di valori di x cui corrispondono valori di y negativi</td><td>$x < -1 \cup x > 1$</td></tr>
<tr><td>Intersezioni del grafico con l'asse x</td><td>$(-1;0)$ $(0;0)$ $(1;0)$</td></tr>
<tr><td>Intersezione del grafico con l'asse y</td><td>(0;0)</td><td>f(0)=-0^4-0^2=0 perciò il punto di coordinate (0;0)</td></tr>
</table>

Osservazione: anche in questo caso si può seguire un percorso più semplice, fermandosi alla scomposizione in polinomi di secondo grado e applicando quello che sai delle disequazioni di secondo grado: $q(x) = x^2(1-x^2)$.

valori delle x			−1		0		1	
segni dei fattori al secondo membro	x^2	+	+	+	0	+	+	+
	$1-x^2$	−	0	+	+	+	0	−
segno di f(x)	y	−	**0**	+	**0**	+	**0**	−

A pag. 5 puoi vedere una rappresentazione del segno di *q(x)* sul piano cartesiano.

Attenzione: non tutte le quartiche sono **simmetriche** rispetto all'*asse y* e non tutte **passano** per l'**origine**. Scrivi equazioni di quartiche che non godano di nessuna delle suddette caratteristiche.

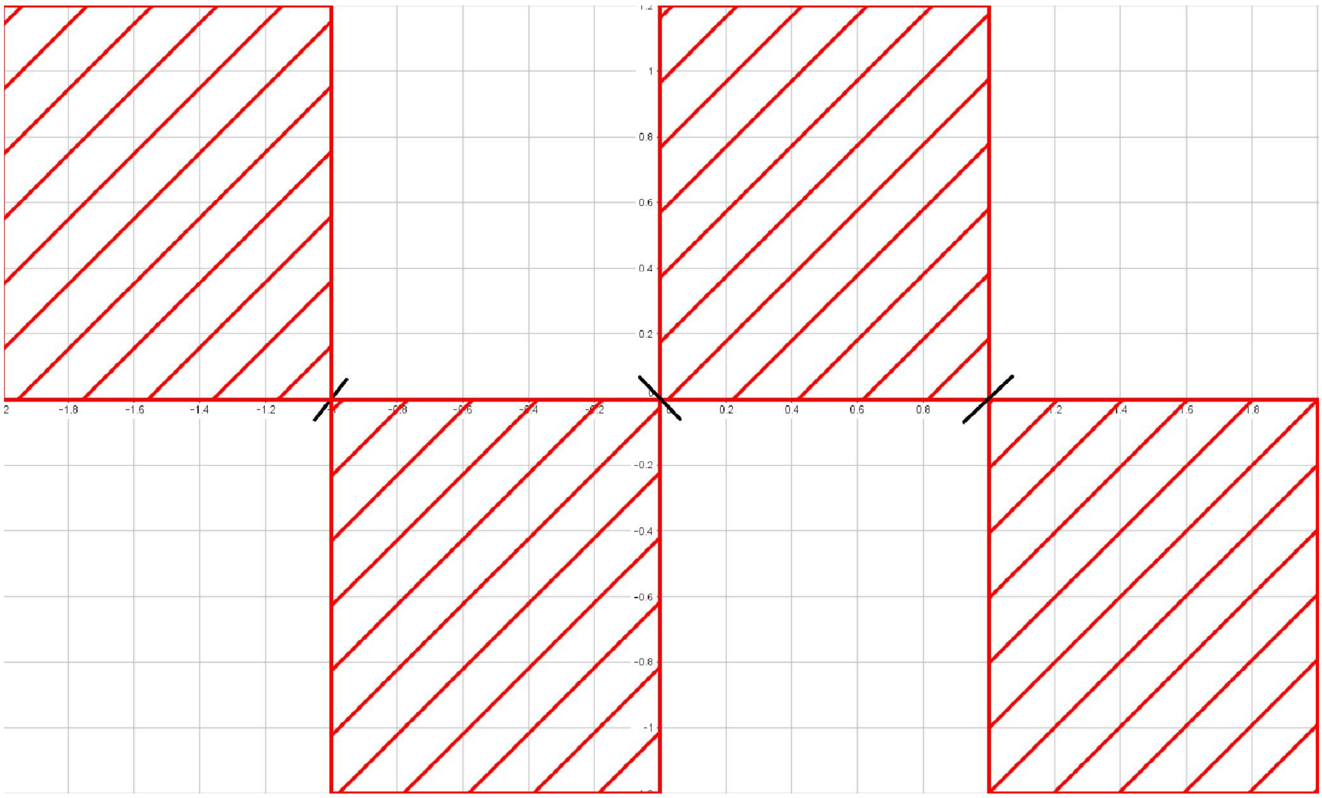
EX4 Prova ad esercitarti con le funzioni di equazione: $l(x) = -x^4 + 1$ e $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Non fare subito il grafico con Geogebra: prima fai lo *studio* del *segno* e prova a rappresentarlo sul piano cartesiano.

EX5 Applica a *q(x)* una **traslazione** di vettore (1;1) e vedi cosa succede. Secondo te è possibile che il grafico di una quartica <u>non</u> abbia intersezioni con l'*asse x*? E con l'*asse y*? Argomenta le tue affermazioni.

EX6 Scrivi l'equazione della simmetrica di *q(x)* rispetto a O. Secondo te è possibile che il grafico di una quartica abbia tutti i punti con ordinate solo positive o solo negative? Argomenta le tue affermazioni.

Per riuscire a tracciare il **grafico** di una **funzione polinomiale** *a mano*, cioè senza aiuti tecnologici, dovrai acquisire strumenti matematici nuovi: i **limiti** e le **derivate**, che cominceremo a esaminare nelle prossime lezioni.

Rappresentazione del segno di *f(x)* sul piano cartesiano. Le intersezioni con l'*asse x* sono indicate con un segmento.



Rappresentazione del segno di *q(x)* sul piano cartesiano. Il punto di tangenza è indicato con un archetto.