Equazioni Differenziali

Carla A. Ferradini

December 9, 2017

1 Introduzione e notazioni

Un'equazione differenziale è un'equazione che ha come incognita una funzione. In particolare un'equazione differenziale è una relazione tra una funzione incognita e alcune delle sue derivate.

Esempio

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) + d = 0 \tag{1}$$

La (1) è una generica equazione differenziale lineare di secondo ordine a coefficienti reali e costanti.

È detto ordine o grado dell'equazione differenziale il più alto tra gli ordini delle derivate presenti nell'equazione.

Un'equazione differenziale è lineare se la funzione e le sue derivate che appaiono in essa hanno esponente 1.

Esempio

$$af'(x)^2 + bf(x) + c = 0 \tag{2}$$

La (2) **non** è lineare, mentre la (1) sì.

Se un'equazione differenziale è lineare allora ogni combinazione lineare delle sue soluzioni è a sua volta soluzione dell'equazione. Ovvero, se $z_1(x)$ e $z_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale allora ogni funzione del tipo $z(x) = Az_1(x) + Bz_2(x)$, con A, B reali, è soluzione.

Un'equazione differenziale è detta omogenea se il termine noto è nullo.

Nel file verrà usata talvolta la notazione di Leibnitz e talvolta quella di Newton. È quindi utile ricordare che:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \dot{f}(x) \tag{3}$$

$$f''(x) = \frac{ddf}{dx} = \ddot{f}(x) \tag{4}$$

2 Equazioni differenziali lineari di primo ordine

Le equazioni differenziali del primo ordine sono equazioni in cui appare solamente la derivata prima della funzione oltre alla finzione stessa.

$$af'(x) + bf(x) + c = 0 \tag{5}$$

La (5) è un'equazione differenziale di primo ordine lineare.

Le equazioni differenziali lineari di primo ordine sono facilmente risolvibili con il metodo della separazione delle variabili. Serviamoci di un esempio per illustrare questo metodo.

2.1 ES1. I circuiti RC: carica e scarica del condensatore

Consideriamo un circuito con un generatore ideale di potenziale V, un condensatore piano di capacità C e una resistenza R.

Vogliamo conoscere quanta carica c'è sul condensatore in ogni istante di tempo a partire da quando il condensatore è scarico.

Scriviamo l'equazione del circuito:

$$V = iR + \frac{q}{C} \tag{6}$$

Ricordando che l'intensità di corrente è la derivata prima della carica in funzione del tempo, avremo:

$$V = \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} \tag{7}$$

Ovvero un'equazione differenziale lineare di primo ordine.

Trattando i differenziali come se fossero quantità possiamo operare per separazione di dq e dt:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} - \frac{q}{RC} \to \frac{RC}{VC - q}dq = dt \tag{8}$$

Ora, operando il cambio di variabile $x = VC - q$, possiamo integrare entrambe le parti dell'equazione da una parte in dx con $dx = -dq$ e l'altra in dt:

$$-\int_{x_0}^{x(t)} \frac{RC}{x}\, dx = \int_0^t dt \Rightarrow -RC\ln(\frac{x(t)}{x_0}) = t \tag{9}$$

Isolando la $x(t)$ e sostituendo di nuovo $x = VC - q$ otteniamo:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow q(t) = VC(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{10}$$

2.2 ES2. I circuiti RL: chiusura del circuito

Consideriamo un circuito formato da un generatore ideale di potenziale V, un'induttanza L e una resistenza R.

Vogliamo conoscere quanto vale l'intensità di corrente che attraversa il circuito in ogni istante a partire da quanto il circuito viene chiuso.

Scriviamo l'equazione del circuito:

$$V = iR + L\frac{di}{dt} \tag{11}$$

La (11) è un'equazione differenziale lineare di primo ordine formalmente identica alla (6). Di conseguenza la risolveremo con lo stesso metodo, ma sfruttando accorgimenti differenti durante l'integrazione.

Separiamo quindi le variabili:

$$\frac{di}{dt} = \frac{V - iR}{L} \rightarrow dt = \frac{L}{V - iR}di \rightarrow \int_0^{i(t)} \frac{L}{V - iR}\, di = \int_0^t dt \tag{12}$$

Osserviamo che $d(V - iR) = -Rdi$, per cui moltiplicando $-R$ al denominatore e al numeratore nella parte sinistra dell'uguaglianza ci possiamo ricondurre a dover risolvere un'integrale quasi immediato.

$$\int_0^{i(t)} \frac{L}{-R(V - iR)}(-R)di = \int_0^t dt \rightarrow -\frac{L}{R}\int_0^{i(t)} \frac{1}{V - iR}(-R)di = \int_0^t dt \tag{13}$$

Integrando, otteniamo:

$$\ln\left(\frac{V - Ri}{V}\right) = -\frac{R}{L}t \rightarrow V - Ri = Ve^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow i = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \tag{14}$$

Esercizi

1. Verifica che la (10) e la (14) descrivano esattamente quello che ci aspettiamo che accada analizzando i casi limite di $t \rightarrow \infty$ e $t = 0$.

2.Trova l'equazione che descrive l'andamento della carica presente sul condensatore durante il processo di **scarica** in un circuito identico a quello dell'ES1.

3.Trova l'equazione che descrive l'andamento dell'intenistà in un circuito identico a quello dell'ES2 dopo che il circuito viene **aperto**.

4.Trova l'equazione che descrive la velocità di un corpo in caduta libera e soggetto a una forza di attrito viscoso, dovuta all'aria, dipendente dalla velocità del corpo, ovvero $F_v = -\beta v$.

3 Equazioni differenziali lineari di secondo ordine

Un'equazione differenziale di secondo ordine è un'equazione differenziale in cui appare la derivata seconda della funzione incognita oltre alla funzione stessa.

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0 \tag{15}$$

La (15) è una generica equazione differenziale di secondo ordine lineare e omogenea, in quanto il termine noto è nullo.

Si può dimostrare che tutte e sole le soluzioni di un'equazione come la (15) sono combinazioni lineari di due soluzioni particolari di essa. Ovvero tutte le soluzioni saranno nella forma:

$$f(x) = Ae^{z_1 x} + Be^{z_2 x} \tag{16}$$

Con A e B opportune costanti determinabili date le condizioni iniziali del fenomeno studiato e z_1 e z_2 soluzioni dell'equazione associata all'equazione differenziale. Ovvero un'equazione del tipo:

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{17}$$

Dove a, b, c corrispondono ai coefficienti dell'equazione differenziale.

Per la risoluzione delle equazioni differenziali di secondo ordine è spesso necessario conoscere le proprietà dei numeri complessi.

3.1 Cenni sui numeri complessi

Definiamo l'unità immaginaria i tale che $i^2 = -1$.

Ogni numero nella forma $a + bi$, con a, b reali, è un numero composto da una parte reale a e da una parte immaginaria bi.

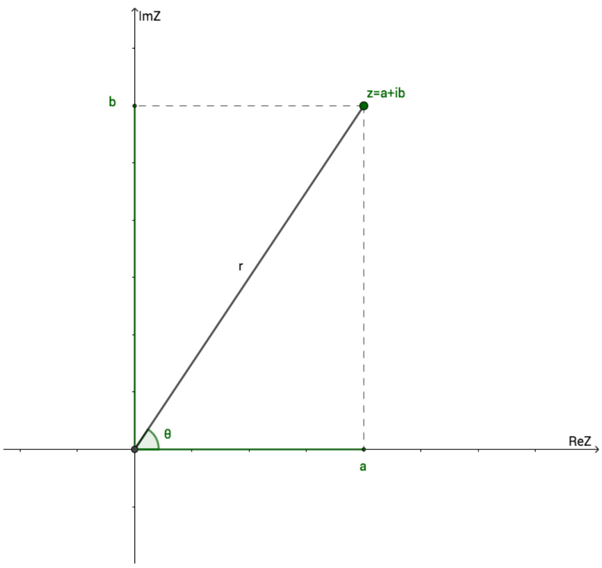
I numeri complessi sono rappresentabili nel piano di Gauss.

Un numero complesso può essere rappresentato in diversi modi:

Rappresentazione cartesiana

$$z = a + bi \tag{18}$$

con a, b reali.



Rappresentazione polare

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{19}$$

dove $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$.

Rappresentazione esponenziale

$$z = re^{i\theta} \tag{20}$$

con $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$.

3.2 ES3. L'oscillatore armonico senza attrito

Consideriamo una massa attaccata a una molla di costante elastica k che viene tirata fino a una distanza x_0 dalla posizione di equilibrio e lasciata con velocità iniziale nulla.

Ci ricordiamo che definendo il moto armonico come proiezione su un diametro di un moto circolare uniforme ottenevamo $x(t) = x_0\cos(\omega t)$ con $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dimostriamo come si ottiene questa formula risolvendo un'equazione differenziale.

Scriviamo l'equazione del moto:

$$F = -kx \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \tag{21}$$

Abbiamo così un'equazione differenziale di secondo ordine con il coefficiente di primo ordine nullo. Intuitivamente, qual è la funzione che derivata due volte da l'opposta di se stessa moltiplicata per una costante? Verifichiamo con i conti se ciò che otteniamo coincide con ciò che ci aspettiamo.

Poniamo $\omega^2 = \frac{k}{m}$ e risolviamo l'equazione associata:

$$z^2 = -\omega^2 \tag{22}$$

Tale equazione ha due soluzioni complesse $z_1 = i\omega$ e $z_2 = -i\omega$.

Di conseguenza la soluzione generale sarà:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \tag{23}$$

Troviamo le costanti A e B imponendo le condizioni iniziali.

Per $x(0) = x_0$ avremo:

$$x_0 = A + B \tag{24}$$

Per $\dot{x}(0) = 0$ avremo

$$\dot{x}(0) = i\omega Ae^{i\omega t} - i\omega Be^{i\omega t} \Rightarrow A - B = 0 \tag{25}$$

Combinando la (24) e la (25) otteniamo $A = B = \frac{x_0}{2}$.

Passiamo ora alla forma polare e sostituiamo i valori di A e B:

$$x(t) = \frac{x_0}{2}[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t) + \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)] = x_0\cos(\omega t) \tag{26}$$

Q.E.D.

Esercizi

Considera una massa m attaccata a una molla di costante elastica k oscillante in un fluido. Sulla massa agisce una forza di attrito viscoso direttamente proporzionale alla sua velocità ($F_v = -\beta\dot{x}$).

1. Trova l'equazione del moto se $\beta > 2\sqrt{mk}$ e dai una spiegazione fisica di ciò che ottieni.

2. Trova l'equazione del moto se $\beta < 2\sqrt{mk}$ e dai una spiegazione fisica di ciò che ottieni.

4 Equazioni differenziali non lineari

Le equazioni differenziali non lineari non hanno metodi risolutivi semplici e immediati, ma possono essere risolte facilmente sfruttando approssimazioni.

4.1 Oscillazioni del pendolo

Il caso delle oscillazioni del pendolo è un esempio di come delle opportune approssimazioni ci possono semplificare la risoluzione di un'equazione non lineare.

Scriviamo l'equazione del moto di una massa m appesa a un pendolo formato da un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza r.

$$mr\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \tag{27}$$

Questa è un'equazione differenziale non lineare che ha come funzione incognita $\theta(t)$. In questa forma non è facilmente risolvibile, in quanto dovremmo cercare una funzione che derivata due volte è uguale al seno di se stessa moltiplicato per una costante.

Tuttavia, per θ piccolo vale $\sin\theta \approx \theta$, con θ espresso in radianti. Tale approssimazione è ancora una buona approssimazione fino a $\theta \approx \frac{\pi}{6}$.

Di conseguenza, per valori di θ piccoli, possiamo approssimare la (27) in:

$$mr\ddot{\theta} = -mg\theta \tag{28}$$

Questa è un'equazione differenziale di secondo ordine lineare che si può risolvere in modo analogo a quanto esposto nel secondo paragrafo.