Definizioni di *limite* mediante *intorni*

Rispetto all'approccio intuitivo, nelle definizioni *ufficiali* si parte dalle y. Per spiegarvi perché ho chiesto aiuto al mio amico matematico **Domenico Fiorenza**, che risponde così:

"Partiamo dalla *definizione intuitiva*: alla fine ci convinceremo che quella *formale* altro non è che la *traduzione* della *definizione intuitiva*. Comincio con il limite finito per *x* che tende a infinito [va bene pensare a **più** infinito] che, in realtà, è il più intuitivo.

La definizione intuitiva è: "*f(x)* tende ad *l*, per *x* che tende all'infinito se, *man mano* che *x cresce*, *f(x)* è costretto a stare *sempre più vicino ad l*, fino a *schiacciarsi* su *l*"

Cosa intendiamo con "è costretto a stare sempre più vicino ad l, fino a schiacciarsi su l"? che qualunque *distanza di sicurezza* poniamo tra f(x) ed l, ad un certo punto f(x) sarà costretto a starsene più vicino ad l della *distanza di sicurezza*.

E' come un cane legato a un palo da una catena che gli stiamo accorciando: quella che gli stiamo riducendo non è la distanza alla quale *sta* il cane dal palo, quella che gli stiamo riducendo inesorabilmente è la distanza *massima* alla quale può stare.

Quindi, a un certo punto, il cane si troverà a non poter starsene più lontano dal palo di 10 metri, poi non potrà starci più lontano di 4, poi di 1, poi di mezzo metro, etc. qualunque *distanza* ci viene in mente, *da un certo punto* in poi il cane non potrà uscire dall'**intorno** stabilito da quella distanza.

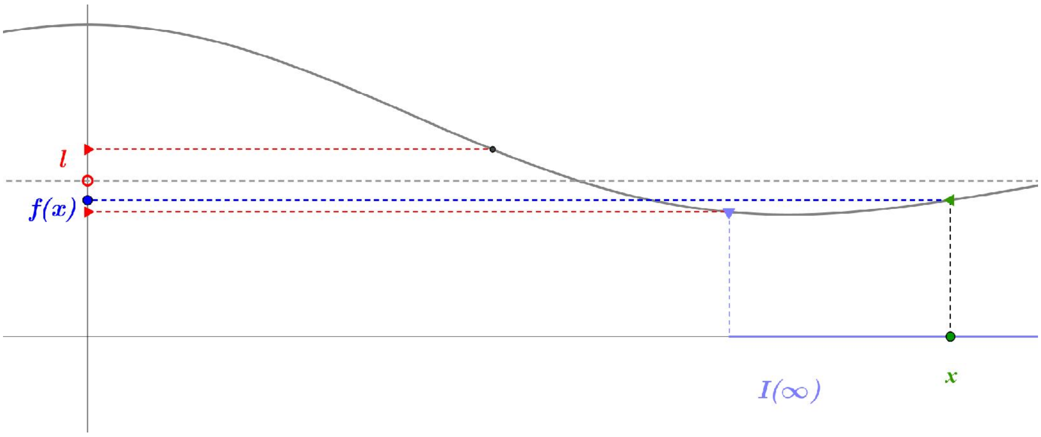
Siamo così arrivati alla seguente formulazione della definizione di limite: "f(x) tende ad l, per x che tende all'infinito se, preso comunque un **intorno** di l si ha che *da un certo punto in poi*, f(x) non può stare fuori da quell'intorno"

Ora, "da un certo punto in poi" si traduce; "per tutti gli *x* da un certo M in poi", cioè "per tutti gli *x* che stanno in un **intorno** di infinito", mentre "*f(x)* non può stare fuori dall'**intorno** di l" si traduce con "*f(x)* sta nell'intorno di l" e quindi abbiamo:

"*f(x)* tende a *l*, per *x* che tende a più infinito, se, **per ogni** intorno di *l*, **esiste** un intorno di infinito fatto di valori di *x* le cui immagini stanno nell'intorno di *l*"

adesso ci basta osservare che "un intorno di *infinito* fatto di valori di *x* le cui immagini stanno nell'intorno di *l*" si traduce con "un intorno di infinito *tale che*, **per ogni** *x* in quest'intorno, *f(x)* appartiene all'intorno di *l* ". Per arrivare finalmente a:

"*f(x)* tende ad *l* per *x* che tende all'infinito se, **per ogni** intorno di *l*, **esiste** un intorno di infinito *tale che*, **per ogni** *x* in questo intorno, *f(x)* appartiene all'intorno di l"



Ricorda che, nello studio di funzione, devi calcolare i ***limiti*** relativamente a:

1) Gli **intorni** di infinito (se fanno parte dell'*insieme di definizione*)

2) Quei valori di *x*, esclusi dall'*insieme di definizione*, che siano *punti di accumulazione* per la funzione

Lo **schema** delle **definizioni** è sempre uguale, perciò te lo ripeto per la prima definizione che trovi sul libro e poi, nelle altre, cambieranno solo dettagli.

1) Limite finito, per x che tende a un valore finito

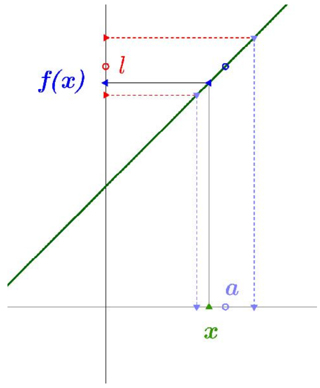
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \Leftrightarrow$$

A) *per ogni* **intorno** del numero reale ***l***

B) *esiste un* **intorno** del numero reale *a* *tale che*:

C) *per ogni* numero reale ***x*** nell'intorno di *a* (*a* escluso),

D) l'*immagine* di ***x*** sta nell'intorno di ***l***.



In **simboli**:

$$\forall\ I(l),\ \exists\ I(a)\ \ |\forall x\ [x \in I(a),\ \ x \neq a]\ \Rightarrow\ \ f(x) \in I(l).\ a,l \in \mathbb{R}$$

A **rigore**, dunque, si dovrebbe ricavare il valore del *limite probabile* – facendo calcoli come abbiamo visto a lezione – e poi si dovrebbe verificare rigorosamente che il valore trovato risponda alla definizione. All'università. Forse.

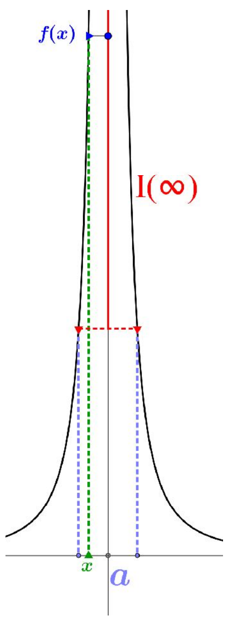
2) Limite infinito, per x che tende a un valore finito (asintoti verticali)

$$\lim_{x \to a} |\ f(x)\ | = +\infty \qquad \Leftrightarrow$$

Per ogni intorno di ∞ *esiste* un intorno del numero reale *a* tale che: *per ogni* valore ***x*** nell'intorno di *a* (*a* escluso), il **modulo** dell' *immagine* di ***x*** sta nell'intorno di ∞.

In simboli:

$$\forall\ I(\infty),\ \exists\ I(a)\ \ |\forall x\ [x \in I(a),\ \ x \neq a]\ \Rightarrow |\ f(x)\ | \in I(\infty).\ a \in \mathbb{R}$$



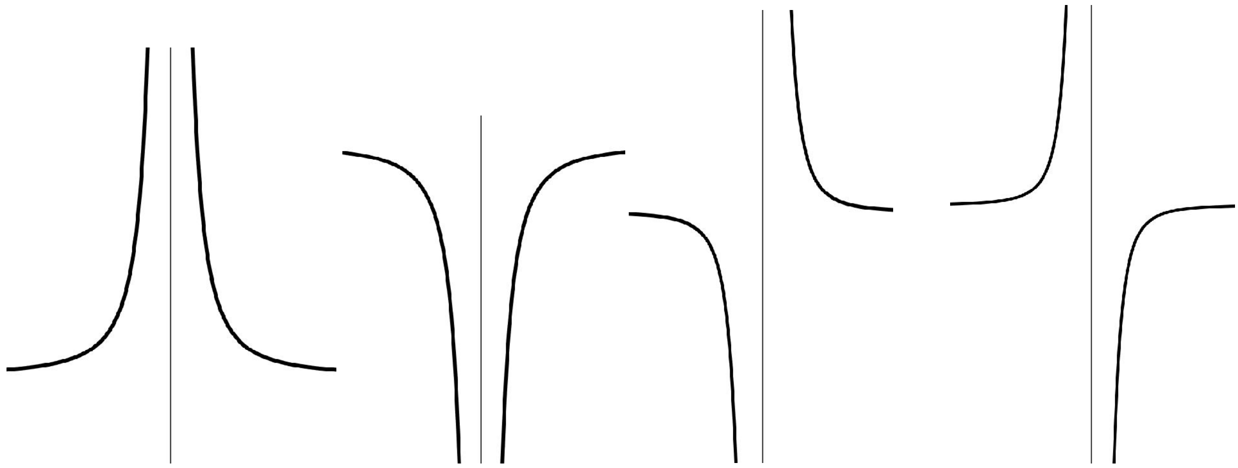
N.B. Il "**segno** dell'***infinito***" corrisponde al **segno** della *funzione* e si può quindi ricavare comodamente dallo studio del segno della funzione

Può accadere che il limite destro e il limite sinistro abbiano segni differenti, come accade per la funzione: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nell'***intorno*** di **0**.

Può accadere anche che un limite dia valore infinito e l'altro, no; come per la funzione $g(x)=e^{1/x}$ nell'***intorno*** di **0**.

DEF La **retta** di equazione ***x* = *a*** si chiama **asintoto verticale** della funzione.

Graficamente (possono presentarsi quattro casi, nel caso di funzioni algebriche):



Grafici – ottenuti con Geogebra, eliminando l'asse x – **rispettivamente di:**

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{x^2}} \qquad \boldsymbol{y = -\frac{1}{x^2}} \qquad \boldsymbol{y = \frac{1}{x^3}} \qquad \boldsymbol{y = -\frac{1}{x^3}}$$

Una **funzione fratta** ha tanti asintoti verticali quanti sono i valori distinti che annullano il denominatore (*funzione omografica*, $\boldsymbol{y = \frac{senx}{cosx}}$, ecc). Gli asintoti verticali di una funzione possono essere in **numero infinito** (ES: *y*=tg*x* in **R**).

Parlando del **disegno**, particolarmente grave, disegnare porzioni di grafico che **toccano** l'asintoto verticale ma, soprattutto, parallele all'asse y: si viola infatti in questo modo, la definizione di funzione. E' chiaro perché?

3) Limite finito, per x che tende all'infinito (asintoti orizzontali)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l \qquad \Leftrightarrow$$

Per ogni intorno del numero reale ***l*** *esiste* un intorno di ∞ tale che: *per ogni* valore ***x*** nell'intorno di ∞, l'*immagine* di ***x*** sta nell'intorno di ***l***.

In simboli: $\forall\ I(l),\ \exists\ I(\infty)\ |\forall x\ [x \in I(\infty)] \ \Rightarrow\ f(x) \in I(l).\ l \in \mathbb{R}$

DEF La **retta** di equazione ***y*=*l*** si chiama: ***asintoto orizzontale*** della funzione.

Graficamente puoi rifarti alla figura a pag 1

Contrariamente a come sembra fare Geogebra (se zoomaste, vedreste che non è come sembra), non dovrete mai far toccare ai vostri grafici l'asintoto.

ES Si ha un *limite finito* per *x che tende all'infinito*, nelle **funzioni algebriche fratte** in cui ***gr N ≤ gr D*** (il grado del numeratore è minore o uguale al grado del denominatore).

Cioè o il numeratore è un infinito di **ordine** inferiore al denominatore o sono infiniti dello stesso **ordine.** Nel primo caso il limite è 0, che è pur sempre un numero! E, quindi, l'**asintoto orizzontale** sarà l'**asse x**. Di nuovo succede nella funzione: $f(x) = \frac{1}{x}$.

N.B.1 Dalla dimostrazione inerente questi tipi di limite si vede come siano uguali il limite per *x* che tende a + ∞ e per *x* che tende a – ∞, *per le funzioni algebriche razionali fratte*.

N.B.2 Interessante stabilire per quali intervalli di *x* la **funzione** (le ordinate dei punti del grafico della funzione) sta "sopra", sta "sotto" o *taglia* l'asintoto orizzontale. Si tratta di risolvere la **disequazione**: $f(x) \geq l$**,** sapendo leggere correttamente le soluzioni.

4) Limite infinito, per x che tende all'infinito (in un caso, asintoti obliqui)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \Leftrightarrow$$

Per ogni intorno di ∞ sull'asse y *esiste* un intorno di ∞ sull'asse x tale che: *per ogni* valore ***x*** nell'intorno di ∞, l'*immagine* di ***x*** sta nell'intorno di ∞.

In simboli: $\forall\ I(\infty)_y,\ \exists\ I(\infty)_x \mid \forall x\ [x \in I(\infty)_x] \ \Rightarrow\ f(x) \in I(\infty)_y$.

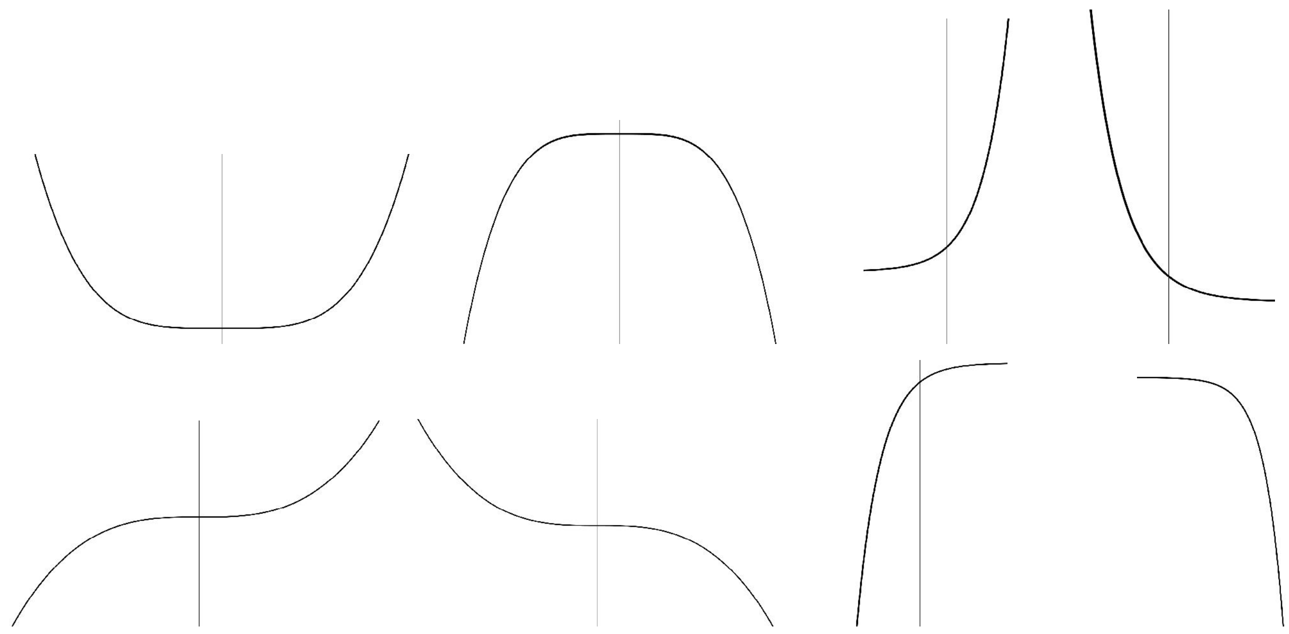
ES1 Abbiamo già visto che si ha un *limite infinito* per *x che tende all'infinito*, nelle **funzioni polinomiali** o nelle **funzioni fratte** in cui il numeratore ha grado superiore al denominatore (o è un infinito di **ordine** superiore).

ES2 Vi sono funzioni che vanno all'infinito solo per *x* tendente a + infinito (esponenziali a base maggiore di 1) o solo per *x* tendente a – infinito (esponenziali a base minore di 1).

N.B.1 Il **segno** dell'***infinito*** corrisponde al **segno** della *funzione*.

N.B.2 Sfruttate bene le simmetrie. Anche per il calcolo dei limiti!

Graficamente (possono presentarsi SOLO otto casi):



A voi scoprire a che funzioni possono corrispondere i grafici.

Solo per il caso di *limite infinito per x tendente all'infinito* ha senso la ricerca degli **asintoti obliqui**. E solo se la funzione <u>non</u> è polinomiale (o non ha un andamento noto).

Attenzione: solo per le **funzioni algebriche razionali fratte** ha senso il confronto tra i gradi di numeratore e denominatore, ecc. Per tutte le altre funzioni dovrai vedere se **esistono finiti** i limiti, *per x tendente all'infinito*, di: *f(x)/x* (m) e *f(x)-mx* (q)

5) Definizione unitaria di limite

Osservando le definizioni di limite date sinora, puoi vedere come seguono sempre uno stesso schema. Questo ci permette di dare una definizione unitaria di limite (con la cautela di escludere eventuali valori per i quali f(x) non è definita):

$$\lim_{x\to A} f(x) = B \iff \forall I(B), \exists I(A) | \forall x[x \in I(A)] \implies f(x) \in I(B)$$