Definizione di funzione continua e di derivata

Abbiamo definito la **derivata** in un **punto** di una *funzione continua* e la **funzione derivata** (per una funzione derivabile in tutto il proprio I.D.). Richiamiamo le definizioni di funzione continua, derivata in un punto e funzione derivata:

DEF Una funzione *f(x)*, definita in x_0, si dice **continua** in in x_0, sse:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \text{ esiste } (l^+=l^-) \text{ finito e } l=f(x_0)$$

DEF Una funzione *f(x)*, definita in un insieme **I**, è **continua in tutto I** se è continua in ogni punto di **I**. **ES** i polinomi sono continui su tutto $\mathbb{R}$.

DEF La **derivata** di *f(x),* continua in x_0, è il limite del rapporto incrementale di *f(x)* in x_0 (nell'ipotesi che esista e che sia finito):

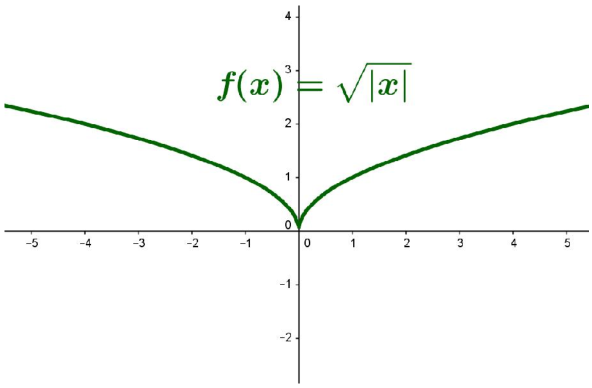
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

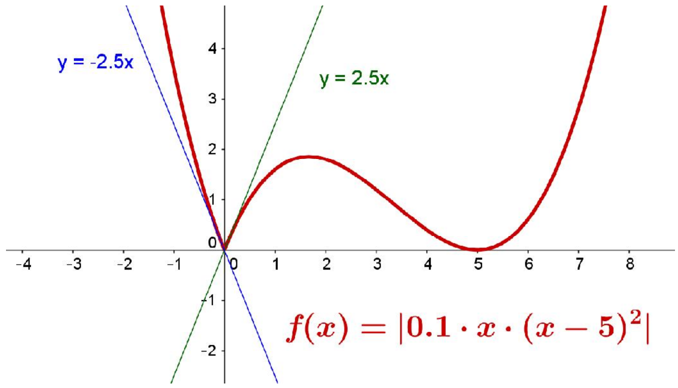
DEF Una funzione *f(x)*, definita in e continua in x_0, si dice **derivabile** in x_0, sse $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$ **esiste** ($l^+=l^-$) **finito**.

DEF Una funzione *f(x)*, definita e continua in un insieme **I**, è derivabile in **I** se è derivabile in ogni punto di **I**.

Significato geometrico La derivata di *f(x)* in x_0 è la **pendenza** della retta **tangente** al grafico di *f(x)* nel punto di coordinate $[x_0;f(x_0)]$

Se una funzione è continua è anche derivabile ma se è derivabile non *per forza* è anche continua. Un punto in cui una funzione è continua ma non derivabile può essere un **punto angoloso** (vi sono due tangenti con pendenza differente ma finita, in quel punto: figura a destra) o una **cuspide** (le tangenti sono sempre due ma coincidenti: una con pendenza +∞ e l'altra con pendenza -∞: figura a sinistra):





Utilizzi della derivata prima di una funzione

La derivata prima ***f'****(x)* [si può scrivere anche: D*f(x)* o $\frac{df(x)}{dx}$] di una funzione *f(x)* si può utilizzare per le seguenti applicazioni:

1) Determinare l'equazione della **retta tangente** al grafico **G** di *f(x)* in un punto di coordinate: (x_0;*f*(x_0)). Si ha infatti: $r_{tg}(G_f)|_{x=x_0}: \quad (y-y_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

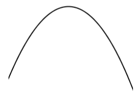
2) Studio dell'**andamento** della funzione *f(x)*:

Una funzione è **crescente** *dove* la **pendenza** della retta **tangente** al suo grafico è **positiva** (incrementi concordi ➔ rapporto incrementale positivo). Cioè *dove* il **segno** della derivata prima è **positivo**.

Una funzione è **decrescente** *dove* la **pendenza** della retta **tangente** al suo grafico è **negativa** (incrementi discordi ➔ rapporto incrementale negativo). Cioè *dove* il **segno** della derivata prima è **negativo**.

DEF Una funzione ha un punto **stazionario** *dove* la **pendenza** della **tangente** al suo grafico è **zero** (cioè la tangente al grafico è parallela all'*asse x*).

Questi **punti stazionari** possono essere di **massimo relativo**, di **minimo relativo**, o di **flesso a tangente orizzontale** (esistono anche punti con *flesso verticale*. La pendenza della tangente, in quel caso, ha modulo *infinito*).



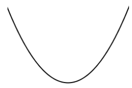
DEF Un punto ***P***$(x_P;y_P)$ di una funzione ***f*** si dice di **massimo relativo** se *esiste* un intorno di x_P tale che, per ogni x in questo intorno: ***f***$(x) < y_P$.

NB Un punto di **massimo relativo** fa da *spartiacque* fra una parte di funzione che cresce (*a sinistra di* x_P) e una porzione di curva che decresce (*a destra di* x_P)

Lo *studio del segno della derivata prima*, in caso di presenza di un **massimo**, è:

		x_P	
$f'(x)$	++++++++	0	---------------
$f(x)$	crescente	**MAX**	decrescente

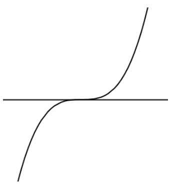
DEF Un punto ***P***$(x_P;y_P)$ di una funzione ***f*** si dice di **minimo relativo** se *esiste* un intorno di x_P tale che, per ogni x in questo intorno: ***f***$(x) > y_P$



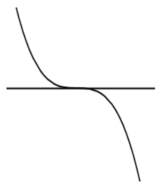
NB Un punto di **minimo relativo** fa da *spartiacque* fra una parte di funzione che decresce (*a sinistra di* x_P) e una porzione di curva che cresce (*a destra di* x_P)

Lo *studio del segno della derivata prima*, in caso di presenza di un **minimo**, è:

		x_P	
$f'(x)$	---------------	0	++++++++
$f(x)$	decrescente	**MIN**	crescente



DEF Un punto si dice di **flesso** se la concavità della curva cambia in esso: la curva da **convessa** passa a **concava** o viceversa.



NB A sinistra **e** a destra di un punto di **flesso** la curva o cresce e continua a crescere (fig. di sinistra) o decresce e continua a decrescere (fig. di destra).

Lo *studio del segno della derivata prima*, in caso di presenza di un **flesso**, è:

		x_P	
$f'(x)$	++++++++	0	++++++++
$f(x)$	crescente	**FL**	crescente

		x_P	
$f'(x)$	--------------	0	--------------
$f(x)$	decrescente	**FL**	decrescente

3) Risoluzione di **problemi di massimo e minimo**.

(**ES**: http://www.matematica.it/tomasi/scuola/5d/max-min-esame.pdf).

4) Applicazioni di teoremi inerenti la derivabilità: **Teorema di Lagrange** (o *del valor medio*); **Teorema di Rolle**; **Teorema di Cauchy**; http://www.batmath.it/matematica/a_derivate/intervallo.htm; **Teorema di De L'Hopital** (simpatica scorciatoia per calcolare alcuni limiti che portano a forme indeterminate!) http://www.batmath.it/matematica/a_derivate/hopital.htm.