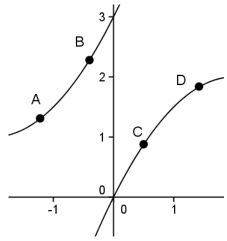
DERIVATE

Hai potuto vedere che per ***disegnare grafici*** *decenti* non basta quel che sai fare sinora (spero): studio del segno, intersezioni con gli assi cartesiani, limiti e eventuali asintoti. Ti manca di sapere con esattezza *dove* [1] il grafico “cresce” o “decresce”, *dove* è “convesso” e *dove* è “concavo”. Definiamo innanzitutto i primi due termini fra virgolette:



DEF Una funzione **“cresce”** o **“è crescente”**, in un **intorno** di $\boldsymbol{x_0}$ se, presi *comunque* due punti **A**$(x_A;y_A)$ e **B**$(x_B;y_B)$ - tali che x_B , $x_A \in I(x_0)$:

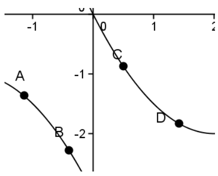
$x_B > x_A \Leftrightarrow y_B > y_A$ o: $x_B < x_A \Leftrightarrow y_B < y_A$.

Cioè: $x_B - x_A > 0 \Leftrightarrow y_B - y_A > 0$ o: $x_B - x_A < 0 \Leftrightarrow y_B - y_A < 0$

oppure $\Delta x > 0 \Leftrightarrow \Delta y > 0$ o: $\Delta x < 0 \Leftrightarrow \Delta y < 0$

Una funzione **è crescente** in un **intorno** di $\boldsymbol{x_0}$ se gli ***incrementi*** delle $\boldsymbol{x}$ e delle $\boldsymbol{y}$ sono ***concordi***. Cioè: $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.

In figura porzioni di curve crescenti; *convessa* (a sx) e *concava* (a dx).



DEF Una curva **“decresce”** o **“è decrescente”** in un intorno di $\boldsymbol{x_0}$ se, presi comunque due punti **A**$(x_A;y_A)$ e **B**$(x_B;y_B)$ - tali che x_B , $x_A \in I(x_0)$:

$x_B > x_A \Leftrightarrow y_B < y_A$ o: $x_B < x_A \Leftrightarrow y_B > y_A$.

Cioè: $x_B - x_A > 0 \Leftrightarrow y_B - y_A < 0$ o: $x_B - x_A < 0 \Leftrightarrow y_B - y_A > 0$

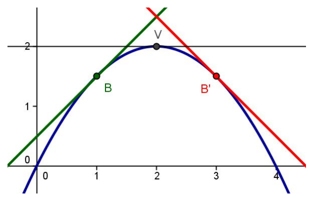
oppure $\Delta x > 0 \Leftrightarrow \Delta y < 0$ e: $\Delta x < 0 \Leftrightarrow \Delta y > 0$.

Una curva **è decrescente** in un intorno di $\boldsymbol{x_0}$ se gli ***incrementi*** delle x e delle y sono ***discordi***. $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

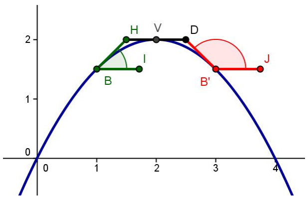
In figura porzioni di curve decrescenti; *convessa* (a dx) e *concava* (a sx).

Il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ fra gli incrementi delle ordinate: $y_B - y_A$ e gli incrementi delle ascisse: $x_B - x_A$ è detto **rapporto incrementale.**

Geometricamente, il rapporto incrementale di una funzione fra i punti A e B**,** è la **pendenza** della retta secante il *grafico della funzione* nei punti **A** e **B**.



Però non di rette secanti ci occuperemo ma di **tangenti**, perché? Perché la pendenza della tangente ci dice *punto per punto* se la curva sta crescendo o no (nell’intorno di quel punto) e perché vedrai che determinare il valore della pendenza di rette tangenti è matematicamente più semplice che di rette secanti!



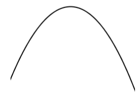
Una funzione è **crescente** *dove* la **pendenza** della retta **tangente** al suo grafico è **positiva** (incrementi concordi ➔ rapporto incrementale positivo): angolo **IBH** *acuto*. Una funzione è **decrescente** *dove* la **pendenza** della retta **tangente** al suo grafico è **negativa** (incrementi discordi ➔ rapporto incrementale negativo): angolo **JB’D** ottuso.

[1] “*Dove*” è un modo sintetico per dire: “in corrispondenza di quali intervalli delle ascisse”.

E dove la **pendenza** è **zero** (punto **V** delle parabole disegnate)?

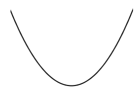
DEF Una funzione si dice **stazionaria** *dove* la **pendenza** della **tangente** al suo grafico è **zero**.

Questi punti, in cui la funzione è stazionaria, possono essere di **massimo relativo**, di **minimo relativo**, o di **flesso a tangente orizzontale** (esistono anche punti con flesso verticale. La pendenza della tangente, in quel caso, ha modulo *infinito*).



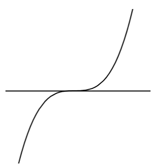
DEF Un punto $P(x_P;y_P)$ di una funzione ***f*** si dice di **massimo relativo** se *esiste* un intorno di x_P tale che, per ogni x in questo intorno: $f(x) < y_P$.

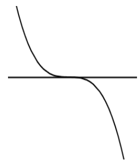
NB Un punto di **massimo relativo** fa da *spartiacque* fra una parte di funzione che cresce (*a sinistra di* x_P) e una porzione di curva che decresce (*a destra di* x_P)



DEF Un punto $P(x_P;y_P)$ di una funzione ***f*** si dice di **minimo relativo** se *esiste* un intorno di x_P tale che, per ogni x in questo intorno: $f(x) > y_P$

NB Un punto di **minimo relativo** fa da *spartiacque* fra una parte di funzione che decresce (*a sinistra di* x_P) e una porzione di curva che cresce (*a destra di* x_P)



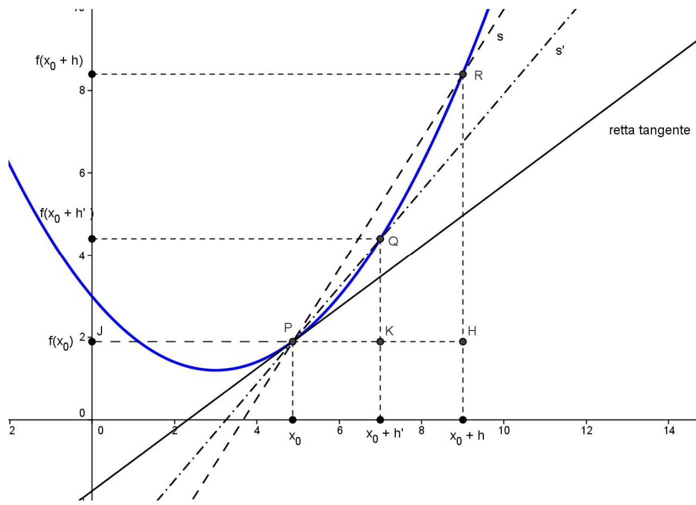


DEF Un punto si dice di **flesso** se la concavità della curva cambia in esso: la curva da **convessa** passa a **concava** o viceversa.

NB A sinistra **e** a destra di un punto di **flesso** la curva o cresce e continua a crescere (fig. di sinistra) o decresce e continua a decrescere (fig. di destra).

Quello che c'interessa è quindi conoscere il **segno della pendenza della retta tangente in ogni punto di un grafico** di funzione, sapendo l'equazione della funzione. Andiamo a vedere quindi come calcolare questa pendenza (e quindi conoscere il suo segno)

Dato il grafico di *f(x)* (in **bluette**), la retta **tangente** alla curva nel punto $\mathbf{P}(x_0;f(x_0))$ (la retta che *tocca in due punti, coincidenti in* ***P***, *il grafico*) la possiamo pensare come caso "limite" di una retta **secante** la curva.



Osserva il disegno: la retta ***s*** immagina di farla ruotare in **P** finché diventi la retta ***s'*** e infine la **retta tangente** appunto.

Così come per disegnare la tangente "partiamo" da una secante e *otteniamo la tangente come limite di questa*, analogamente possiamo ragionare riguardo alla pendenza. Calcoliamo la pendenza della retta ***s***:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_R - y_P}{x_R - x_P} = \frac{\overline{RH}}{\overline{PH}} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

La pendenza della retta ***s'*** sarà:

$$m_{s'} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{\overline{QK}}{\overline{PK}} = \frac{f(x_0+h')-f(x_0)}{h'}$$

Dove $h' < h$.

Procedendo in questo modo puoi prendere valori di ***h*** *piccoli quanto vuoi*; e più saranno piccoli (anche se differenti da zero) più la retta *secante* si avvicinerà alla retta **tangente**.

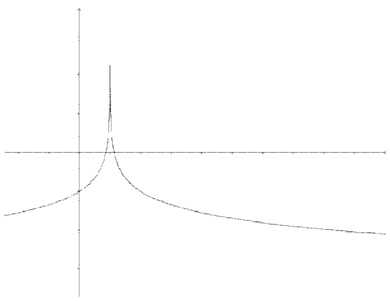
La **pendenza** della **retta tangente** sarà: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

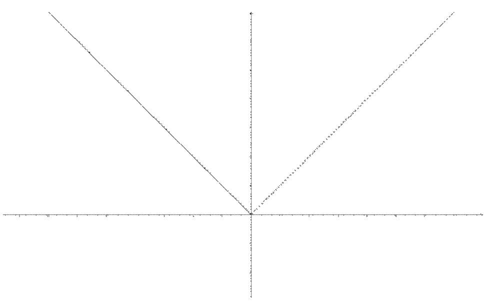
DEF Una funzione *f(x)*, definita e **continua**[2] in un intorno di $\boldsymbol{x_0}$, si dice **derivabile** in $\boldsymbol{x_0}$ se e solo se $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esiste (cioè limite destro e limite sinistro coincidono in un valore ***l***) finito (***l*** < ∞). A parole: *se esiste finito il limite del rapporto incrementale della funzione, nell'intorno del punto* x_0.

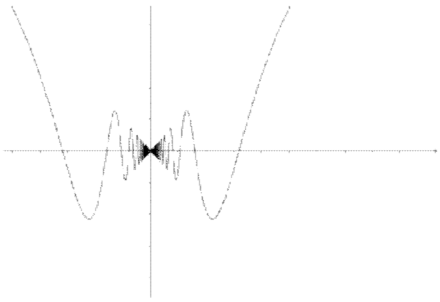
Se esiste finito, il numero risultato del limite si chiama **derivata (prima)** della funzione *y*=***f***(*x*), in $\boldsymbol{x_0}$, e si indica in simboli: $f'(x_0)$, o $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$, o $\left.Df\right|_{x=x_0}$.

NB in questo modo abbiamo definito la derivata di ***f*** nel punto x_0. La derivata si può calcolare per ogni punto del I.D. in cui il grafico abbia **tangente** e sia **unica**. Sono esclusi perciò: "salti" (punti di *discontinuità*), "spigoli" e "cuspidi".

N.N.B. *f(x)* derivabile ➔ *f(x)* continua. Non è detto il viceversa: qui di seguito funzioni continue ma non derivabili in un punto. La prima ha un punto di CUSPIDE; la seconda ha un punto ANGOLOSO e la terza ha un andamento non definito.







DEF Si definisce una **nuova funzione** che associa ad ogni punto dell' I.D. di ***f***(*x*) il valore della derivata corrispondente in quel punto: la ***funzione derivata di f(x)***.

N.B.1 ➔ Le **funzioni polinomiali algebriche** sono derivabili in tutto **R**.

N.B.2 ➔ Le **frazioni algebriche**, dove sono definite, sono derivabili.

NNB Lo **studio del segno** della *funzione derivata prima* di ***f***(*x*) ci fornisce alcune delle informazioni che ci mancavano: ci dice infatti dove ***f***(*x*) *cresce, decresce* ed è *stazionaria*.

ES1 ***f***(*x*)=***m****x*+***q***. Se il grafico di una funzione è una retta mi aspetto che la pendenza della tangente in ogni punto coincida con la retta stessa. La derivata di ***f*** dovrà essere pertanto ***m***. Vediamo applicando la definizione: $f(x_0+h)=m\cdot(x_0+h)+q$ (**Ricorda**: per avere $f(x_0+h)$ **al posto di** ***x*** **devi sostituire:** (x_0+h)), $f(x_0)=m\cdot(x_0)+q$. Mettiamo insieme:

$$(f(x_0+h)-f(x_0))/h = [m\,(x_0+h)+q-(m\,(x_0)+q)]/h = m$$ senza neanche fare il limite!

ES2 ***f***(*x*)=***a****x*^{2} Ora non sappiamo che aspettarci... Applichiamo la definizione e vediamo (per capirci qualcosa non leggere ma COPIA SUL QUADERNO):

---

[2] Momentaneamente diciamo che una **funzione** è **continua** quando, pensando di poter disegnare il suo grafico con una *penna ideale* e su un *foglio ideale*, nel disegnare questo grafico non stacchiamo mai la *penna ideale* dal *foglio ideale*.
Puoi trovare una trattazione chiara e completa delle funzioni continue alle pagg 1497-1503 del volume 4.

$(\boldsymbol{f}(x_0+h)-\boldsymbol{f}(x_0))/h = (\boldsymbol{a}(x_0+h)^2-\boldsymbol{a}(x_0)^2)/h = (\boldsymbol{a}x^2_0+2\boldsymbol{a}hx_0+\boldsymbol{a}h^2-\boldsymbol{a}x^2_0)/h = (2\boldsymbol{a}hx_0+\boldsymbol{a}h^2)/h = 2\boldsymbol{a}x_0+\boldsymbol{a}h$

$\lim_{h\to 0} 2\boldsymbol{a}x_0 + \boldsymbol{a}h = 2\boldsymbol{a}x_0$. Poiché la funzione $\boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{a}x^2$ è definita per tutti i numeri reali, ed è in ogni punto ha tangente unica, si avrà: $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}x^2)=2\boldsymbol{a}x$

Dimostriamo che: $\mathbf{D}(x^n)=\boldsymbol{n}\cdot x^{n-1}$

PREMESSA La dimostrazione classica si basa sullo *sviluppo del* **binomio di Newton**: $(x_0+h)^n$. Ne vedremo una versione semplificata perché, per dimostrare la tesi, basta:

1) sapere che i termini dello sviluppo sono multipli (alcuni in ragione di 1, altri di coefficienti che non ci serve determinare[3]) di: x^n; $h\cdot x^{n-1}$; $h^2\cdot x^{n-2}$; ... ;$h^{n-1}\cdot x$; h^n

2) conoscere il coefficiente del secondo termine dello sviluppo: $h\cdot x^{n-1}$**:** $\boldsymbol{n}$.

Per effettuare la dimostrazione dobbiamo applicare la definizione di derivata a $\boldsymbol{f}(x) = x^n$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n-(x_0)^n}{h} = \lim_{h\to\infty}\frac{x_0{}^n+n\cdot h\cdot x^{n-1}+(TERMINI\quad CONTENENTI\quad h^k;2\le k\le n)-x_0{}^n}{h} =$$

I termini opposti si semplificano: $x_0{}^n - x_0^n$ e si raccoglie a fattor comune $\boldsymbol{h}$ al numeratore, che si semplifica con $\boldsymbol{h}$ al denominatore. I restanti termini contenenti $\boldsymbol{h}$ vanno a zero, perché stiamo calcolando il limite per $\boldsymbol{h}$ tendente a zero, e così otteniamo la tesi:

$$=\lim_{h\to 0}\cancel{h}\cdot\frac{n\cdot x^{n-1}+(TERMINI\quad CONTENENTI\quad h^k;1\le k\le n-1)}{\cancel{h}} = n\cdot x_0{}^{n-1}$$

Come già detto per i limiti: $D(\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot x^k)=\sum_{k=0}^{n} D(a_k\cdot x^k)=\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot D(x^k)=\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot k\cdot x^{k-1}$. In particolare: $\mathbf{D}$(costante)=0 e $\mathbf{D}(\boldsymbol{a}\cdot x^{\boldsymbol{n}})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\cdot x^{\boldsymbol{n-1}}$. E che: $\forall\lambda;\mu\in\mathbb{R}\ e\forall\ f(x),g(x)\ derivabili : D[\lambda f(x)+\mu g(x)] = \lambda Df(x)+\mu Dg(x)$

[Cioè: la **derivata** di una **combinazione lineare** di funzioni è la **combinazione lineare** delle **derivate** delle funzioni]. Sai derivare subito qualunque **funzione polinomiale**:

ES3 $$D(-13\cdot x^4+7\cdot x^3-3\cdot x^2+11\cdot x+71)=-13\cdot Dx^4+7\cdot Dx^3-3\cdot Dx^2+11\cdot Dx+D71)=$$
$$=-13\cdot 4\cdot x^3+7\cdot 3\cdot x^2-3\cdot 2\cdot x+11=-42\cdot x^3+21\cdot x^2-6\cdot x+11$$

Applicando la **definizione di derivata** e quello che sai sui **limiti** (e sulle funzioni coinvolte), puoi dimostrare (facilmente) che:

$\mathrm{D}x^a = ax^{n-1}, \forall a\in\mathbb{Q}$; D(sin$x$)=cos$x$; D(cos$x$)= –sin$x$; D(ln$x$)=$\frac{1}{x}$;

E, *dulcis in fundo*: $\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)' = \frac{N'(x)D(x)-N(x)D'(x)}{D^2(x)}$.

Prova!

---

[3] Osserva che la somma degli esponenti fa sempre $\boldsymbol{n}$ che, mentre l'esponente di $\boldsymbol{x}$ *scende sempre di un valore* – da $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{0}$ -, l'esponente di $\boldsymbol{h}$ *sale sempre di un valore* – da $\boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{n}$ - $(x+h)^n=\underbrace{(x+h)\cdot(x+h)\cdot\ldots\cdot(x+h)}_{n\ volte}$ e che il coefficiente del termine generico: $x^{(n-k)}\cdot h^k$ corrisponde al numero di modi in cui si può effettuare il prodotto fra il termine $x^{(n-k)}$ e il termine h^k. Determinare tale coefficiente investe un ambito della matematica che si chiama **calcolo combinatorio**.