GLI INFINITESIMI E IL LORO ORDINE

DEF INFINITESIMO PER $x \longrightarrow \alpha$

Si dice che una funzione *f(x)* è un infinitesimo per $x \longrightarrow \alpha$ quando $\lim_{x\to\alpha} f(x)=0$.

DEF INFINITESIMI SIMULTANEI

Se *f(x)* e *g(x)* sono entrambi infinitesimi, per $x \longrightarrow \alpha$, si dice che *f(x)* e *g(x)* sono infinitesimi simultanei. In questo caso è interessante vedere quale dei due infinitesimi tende a 0 "più rapidamente". Questo confronto si fa calcolando il limite del loro rapporto, per $x \longrightarrow \alpha$.

DEF INFINITESIMI DELLO STESSO ORDINE

$f(x)$ e $g(x)$(per $x \longrightarrow \alpha$) sono **infinitesimi dello stesso ordine** se $\lim_{x\to\alpha} \frac{g(x)}{f(x)}=l$, $l \neq 0$ e $|l|<\infty$.

Cioè se *f(x)* e *g(x)* tendono a zero con la **stessa velocità**.

Es 1: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Quindi *f(x)*=sin*x* e *g(x)*=*x* sono infinitesimi dello stesso ordine, per $x \longrightarrow 0$.

Es 2: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{2}{-2} = -1$

Quindi *f(x)*= x^2-1 e *g(x)*= x^2-4x+3 sono infinitesimi dello stesso ordine, per $x \longrightarrow 1$

Quindi due funzioni, per *x* che tende a un certo valore finito, sono infinitesimi dello stesso ordine se il limite del loro rapporto è un numero finito, **non nullo**.

DEF INFINITESIMI DI ORDINE DIFFERENTE

Se $\lim_{x\to\alpha} \frac{g(x)}{f(x)}=0$, $g(x)$ è un **infinitesimo** di **ordine superiore** rispetto a $f(x)$ (tende a zero più velocemente); se $\lim_{x\to\alpha} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$ (non importa il segno), $g(x)$ è un **infinitesimo** di **ordine inferiore** rispetto a $f(x)$ (tende a zero meno velocemente).

DEF ORDINE DI UN INFINITESIMO

Dati due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$, per $\boldsymbol{x \longrightarrow \alpha}$, si dice che$f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{\gamma} \neq 0$) rispetto a $g(x)$, quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^\gamma$, cioè se: $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^\gamma} = l$, $l \neq 0$ e $|l|<\infty$.

Es1 : $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$, perché:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{1+\cos x}=0$$

Perché: $\lim_{x\to 0} \sin x/x=1$; $\lim_{x\to 0} \sin x=0$; $\lim_{x\to 0} 1+\cos x=2$

f(*x*)=1–cos*x* è un infinitesimo di **ordine superiore**, rispetto a g(*x*)=*x*. Osservando il calcolo del limite si "vede" che per far sì che siano infinitesimi dello stesso ordine dovremmo elevare alla seconda *x* al denominatore. Perché così avremmo, nel passaggio finale: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$

Essendo: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, f(*x*)=1- cos*x* è un infinitesimo di **ordine 2**, rispetto a g(*x*)=*x* [e non c'entra niente che nel risultato del limite compaia un 2 al denominatore!]

Es2: $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^3}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x+1)} = 0$

Affinché il limite non venga 0 ma un numero dovrò elevare alla terza il denominatore:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^3 \cdot (x+1)^3} = \frac{1}{8}$$

Quindi $f(x) = (x-1)^3$ è un infinitesimo di ordine **3** rispetto a $g(x) = x^2-1$.

Mutatis mutandis, si può fare un discorso analogo per gli **ordini di infinito**. A pag 1497 un'infografica riassume efficacemente la gerarchia degli infiniti.