Primi teoremi sui limiti

Teorema di unicità del limite:

Se per x che tende a x_0 la funzione f(x) ha per limite il numero reale l, allora tale limite è unico.

CONTRESEMPIO: $\lim_{x\to\infty}\sin x$ non esiste perché $y=\text{sen}x$ oscilla sempre tra 1 e -1

Teorema della permanenza del segno:

Sse $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, con $l\neq 0$ e $|l|<\infty \Rightarrow I(x_0) \mid \forall x\in I(x_0) \setminus x_0\ \text{sign}[f(x)] = \text{sign}[l]$.

Questo teorema dice che: se e solo se una funzione ammette **limite finito e non nullo**, per $x\to x_0$, i valori $f(x)$ della funzione avranno lo **stesso segno** (positivo o negativo) **del limite** l, in corrispondenza dei valori di x appartenenti a un intorno di x_0, al più escluso x_0 stesso (nel quale è possibile che la funzione non sia definita). Abbastanza intuitivo, no?

CONTROESEMPIO se $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ è possibile che la funzione abbia valori di segno differenti a destra e a sinistra di x_0. Nei grafici che stiamo studiando è spesso così, no?

Teorema del confronto:

Siano h(x), f(x) e g(x) tre funzioni definite nello stesso dominio $D\subseteq R$, escluso al più un punto x_0.
Se in ogni punto diverso da x_0 del dominio risultano le seguenti condizioni:

- $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$
- $\lim_{x\to x_0}h(x)=l$ è vero anche che: $\lim_{x\to x_0}f(x)=l$
- $\lim_{x\to x_0}g(x)=l$

Forme indeterminate

Le forme indeterminate che possiamo incontrare nel calcolo dei limiti sono sette:

$$+\infty -\infty;\quad \infty\cdot 0;\quad 0/0;\quad \infty/\infty;\quad 1^{\infty};\quad 0^{\infty};\quad \infty^{0}.$$

Abbiamo visto come risolvere i casi: $+\infty -\infty$; $0/0$; ∞/∞ per le funzioni algebriche razionali e irrazionali, intere e fratte.

Anticipazioni: Il teorema di de l'Hôpital (applicabile solo conoscendo le derivate) permetterà di risolvere molte forme indeterminate del tipo: $+\infty -\infty$; $\infty\cdot 0$; $0/0$; ∞/∞. Per risolvere questi altri tipi: 1^{∞}; 0^{∞}; ∞^{0} si sfruttano proprietà caratteristiche di logaritmi ed esponenziali. Ce ne occuperemo più avanti.

Caso ∞/∞

Calcolando il limite per $x\to\infty$, di una frazione algebrica razionale fratta (sia la numeratore sia al denominatore ci sono un polinomi) si verifica sempre la forma indeterminata ∞/∞ .
$\lim_{x\to\infty}N(x)/D(x)$ è uguale a:

- ∞ se grN>grD sse grN=grD+1 si ha un asintoto obliquo
- a_n/b_n se grN=grD=n la retta di equazione: $y=a_n/b_n$ è asintoto orizzontale
- 0 se grN<grD la retta di equazione: y=0 è asintoto orizzontale

Caso 0/0

Calcolando il limite per $x\to x_0$, di una frazione algebrica razionale fratta (sia la numeratore sia al denominatore ci sono un polinomi) si verifica sempre la forma indeterminata 0/0 se e solo se numeratore e denominatore si annullano in x_0. L'indeterminazione si elimina:

- scomponendo numeratore e denominatore
- semplificando la frazione algebrica
- Calcolando il limite della frazione che resta dopo la semplificazione (vedi **file 04**)

Limiti notevoli:

Sono dei tipi di limiti fondamentali nelle applicazioni dell'analisi.
Ne esistono numerosi ma in questo file ne affronteremo due in particolare.

1) $\lim_{x\to 0} (\sin x/x)=1$ (particolarmente utile nella risoluzione dei limiti di funzioni periodiche)

Dimostrazione:

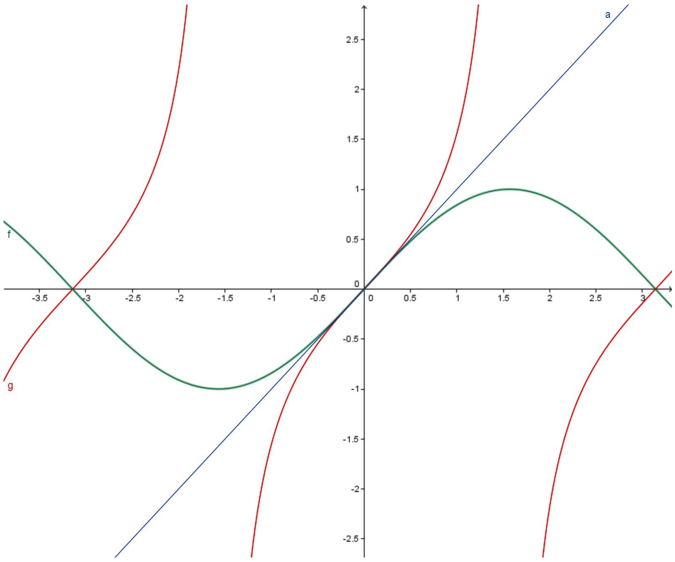
Sappiamo che:

$\lim_{x\to 0} x=0$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} \sin x=0$

quindi ci troviamo in presenza della forma indeterminata 0/0

la funzione $\sin x/x$ è una funzione pari e quindi il suo grafico sarà simmetrico rispetto all'asse y. Possiamo affermare quindi che:

$\lim_{x\to 0^-}(\sin x/x)=\lim_{x\to 0^+}(\sin x/x)$



In figura sopra: i grafici delle funzioni $y=x$, $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$

Nella dimostrazione ci limiteremo al caso $\lim_{x\to 0^+}(\sin x/x)$ in cui $x<\pi/2$

PB<AP<TA ➔ $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ in $I(0)-\{0\}$

dividiamo per $\sin x$ (possiamo farlo perché siamo in in $I(0)-\{0\}$

$\sin x/\sin x<x/\sin x<\operatorname{tg} x/\sin x$ ➔ $1<x/\sin x/1/\cos x$

"capovolgiamo" i membri della disequazione ottenendo così i relativi reciproci e facendo attenzione a cambiare il verso della disequazione:

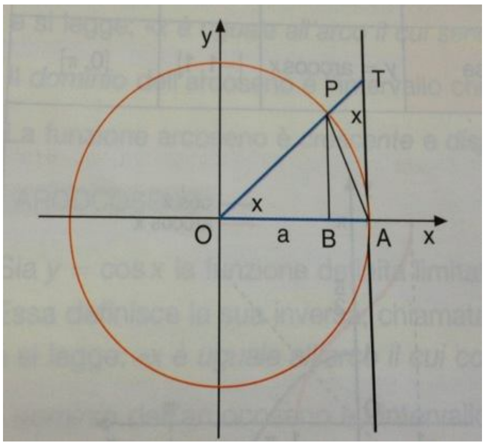
$\cos x<\sin x/x<1$

analizzando la situazione corrente notiamo che:

$\lim_{x\to 0^+}\cos x=1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+}1=1$.

Quindi, per il teorema del confronto: $\lim_{x\to 0^+}(\sin x/x)=1$

e essendo $\lim_{x\to 0^+}(\sin x/x)=\lim_{x\to 0^-}(\sin x/x)=1$ ➔ $\lim_{x\to 0}(\sin x/x)=1$.



Un' applicazione di questo limite notevole:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x^2}{x\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$$

Perché: $\qquad \lim_{x\to 0}\sin x/x=1$; $\qquad \lim_{x\to 0}\sin x=0$; $\qquad \lim_{x\to 0} 1+\cos x=2$

2) $\lim_{x\to\pm\infty}(1+1/x)^x=e$

Partendo dalla successione $(1+1/x)^x$, si può dimostrare che è strettamente crescente e compresa tra 2 e 3 ($2<e<3$). Quindi si definisce e come limite di tale successione: $\lim_{x\to\pm\infty}(1+1/x)^x=e$

In prima approssimazione, il numero di Nepero vale circa e ≈2,7182818284...

Applicazione del limite notevole neperiano:

$\lim_{x\to 0}[\ln(1+x)]/x=$
$=\lim_{x\to 0}1/x\cdot[\ln(1+x)]=$
$=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=$
$=\lim_{y\to\pm\infty}\ln(1+1/y)^y=1$

- il coefficiente del logaritmo diventa il suo esponente adoperiamo un' incognita ausiliaria $y=1/x$
  $x\to 0$ diventa $y\to\pm\infty$
- $(1+1/y)^y$ tende a e perché è il limite notevole neperiano, quindi è come se fosse $\lim_{y\to\infty}\ln e=1$.

Ricorda poi che il limite del logaritmo è il logaritmo del limite!