Come calcolare il limite di una funzione qualunque

$$\lim_{x \to a} \textit{qualunque operazione su } f(x) = \textit{qualunque operazione su } \lim_{x \to a} f(x)$$

Per calcolare limiti di **funzioni composte**, si può calcolare il limite sulla funzione "più interna" e poi applicare l'operazione di composizione al risultato del limite. $\lim_{x \to a} g[f(x)] = g[\lim_{x \to a} f(x)]$

Esempio n. 1

EX 888 pag 1561. Studia la funzione di equazione: $y = 2^{\frac{x-1}{x+2}}$ e tracciane il grafico.

Studiamo il segno della frazione algebrica all'esponente

		-2		1	
x-1	- - -	-	- - -	0	+ + +
x+2	- - -	0	+ + +	+	+ + +
f(x)	+	∄	-	**0**	+

Dunque I.D.[(*f*(*x*)]= $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ e il punto (1;0) è un punto di intersezione del grafico con l'asse *x*.

f(0)=$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}4$, perciò il punto (0;$\frac{1}{\sqrt{2}}$) è un punto di intersezione del grafico con l'asse *y*.

Procediamo adesso a calcolare i **limiti**

$\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$ perciò: $\lim_{x \to \infty} 2^{\frac{x-1}{x+2}} = 2^1 = 2$. Cioè: $2^{\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x+2}} = 2$

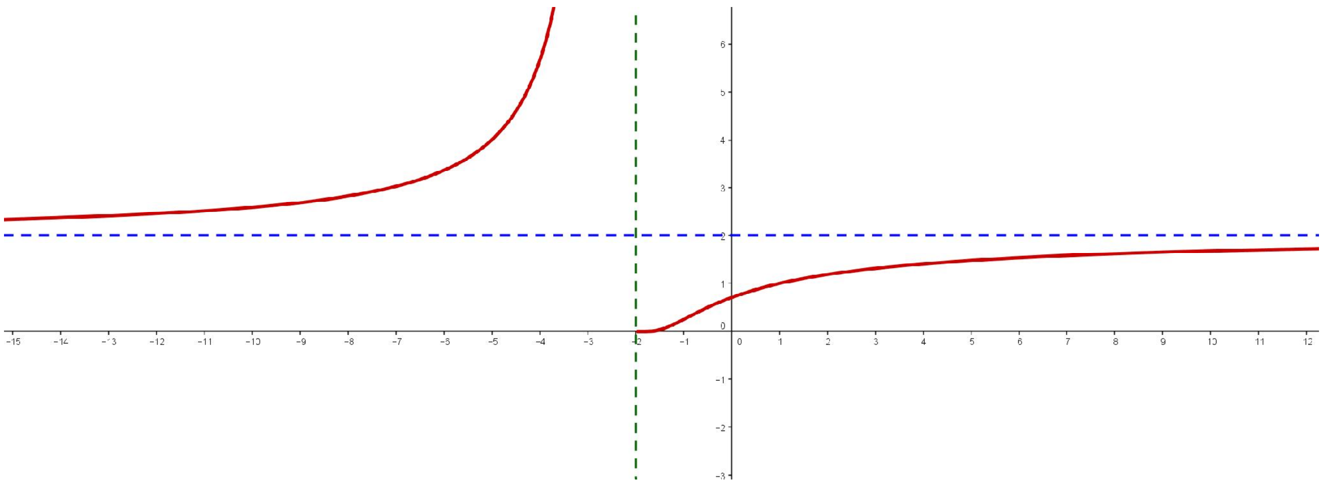
La retta di equazione y=2 sarà dunque un **asintoto orizzontale** [a.o.: y=2]

Seguendo lo studio del segno calcoliamo i limiti destro e sinistro per *x* tendente a -2

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ perciò: $\lim_{x \to -2^+} 2^{f(x)} = 0$ (abbiamo già visto che se l'esponente di una potenza tende a $-\infty$, quella potenza tende a 0)

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty$ perciò: $\lim_{x \to -2^-} 2^{f(x)} = \infty$ (abbiamo già visto che se l'esponente di una potenza tende a, quella potenza tende a ∞; il segno dipende dal segno della base)

La retta di equazione *x*= - 2 sarà dunque un **asintoto verticale** [a.v.: *x*=-2]



[**attenzione**, dal grafico non si vede molto bene che x=-2 è asintoto verticale, ma è così!]

Ribadiamo che se $f(x) = a^x$ (dove $a > 1$) ➔ $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

Se $0 < a < 1$, il grafico della funzione sarà simmetrico rispetto all'asse y e i limiti saranno invertiti.

Esempio n. 2

EX 882 pag 1561. Studia la funzione di equazione: $y = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}$ e tracciane il grafico.

La funzione è definita in $\mathbb{R}$ sse $x < 0 \;\; o \; x \geq 2$. [Oppure I.D.[*f*(*x*)]=(-∞;0)∨[2; +∞)]

Studiamo il segno della funzione:

		0		2	
N(*x*)	+ + +	0		0	+ + +
D(*x*)	- - -	0		+	+ + +
f(*x*)	-	?		0	+

Dunque il punto (2;0) è un punto di intersezione del grafico con l'asse *x*. mentre, essendo la funzione indeterminata per *x*=0 (questo indica il: ?), non ci sono intersezioni con l'asse *y*.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\cancel{x}} = -\infty$$ **a.v.**: *x*=0

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\cancel{x}} = |1| = 1$$ **a.o.**: y=1

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\cancel{x}} = |1| = -1$$ **a.o.**: y=-1