LIMITE FINITO PER *x* CHE TENDE A UN VALORE FINITO

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, l \neq \infty$$

(Caso particolare delle frazioni algebriche)

Se e soltanto se c'è un valore numerico che annulla un polinomio, quel polinomio si potrà scomporre.

Questo dice infatti il **Teorema di Ruffini** (corollario del Teorema del resto): Un polinomio *P(x)* è divisibile per *(x-a)* ***se e solo se*** *P(a)=0.* In questo modo diventa possibile determinare la *divisibilità* per un binomio *(x-a)* senza eseguire la divisione.

Data $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ definita in I(x_0)\{x_0} e |N(x_0)=0 ∩ D(x_0)=0 ➔

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$ che è una **forma indeterminata**. Come fare?

Grazie al *Teorema di Ruffini* sarà:

$f(x) = \frac{(x-x_0)^k \cdot N_1(x)}{(x-x_0)^h \cdot D_1(x)} = (x - x_0)^{k-h} \cdot \frac{N_1(x)}{D_1(x)}$ con: $N_1(x_0) \neq 0$ ∩ $D_1(x_0) \neq 0$

A questo punto abbiamo tre casi possibili:

k>h, *cioè* *k-h>0*	*k=h*, *cioè: k-h=0*	*k<h* *cioè: k-h<0*
$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{k-h} \cdot \frac{N_1(x)}{D_1(x)} = 0$	$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{k-h} \cdot \frac{N_1(x_0)}{D_1(x_0)} \neq 0$	$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{k-h} \cdot \frac{N_1(x)}{D_1(x)} = \infty$
Perché: $(x - x_0)^{k-h} \to 0$ mentre $\frac{N_1(x)}{D_1(x)} \to \frac{N_1(x_0)}{D_1(x_0)}$. **ES** $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x+1}$ $\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^{\cancel{2}}(x-1)^2}{\cancel{x+1}} = 0$	Perché $(x - x_0)^0 = 1$. **ES** $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ $\lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = -2$	**ES** $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^3}$ $\lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{(x+1)^{\cancel{3}\,2}} = -\infty$
Questi due casi sono nuovi e corrispondono propriamente a quanto indicato nel titolo: **limite finito** per *x* che tende a un valore **finito**. In corrispondenza dell'intorno di x_0 la funzione (*f(x)*) è definita a sua volta in un intorno di un valore finito *l*. Graficamente è *come se* il punto (x_0,*l*) costituisse un BUCO nel grafico.		Caso che conosciamo già (*limite infinito per x che tende a un valore finito*). La retta di equazione $x=x_0$ è un **asintoto verticale**. Per conoscere il **segno** dell'infinito devi guardare lo studio del segno

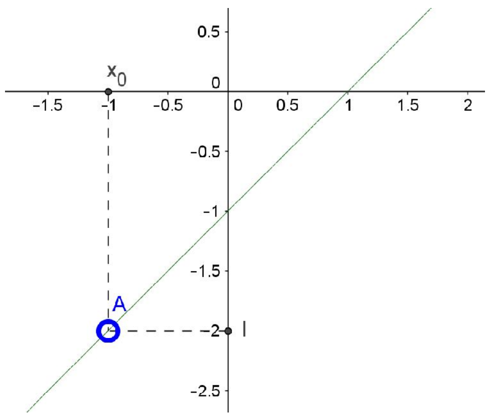

Grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Riassunto

Abbiamo quattro tipi di limite:

1 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Polinomio

Se $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ **algebrica razionale fratta**, si ha questo risultato sse grN>grD e c'è un **asintoto obliquo** sse grN= grD+1. Nelle *funzioni algebriche razionali fratte*, se c'è l'asintoto obliquo è <u>uno solo</u> e la sua equazione si può ricavare o come quoziente della divisione N(x):D(x) (non importa se con resto) o con il metodo che vale per ogni tipo di funzione e cioè calcolando:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = q$$

(Ovviamente devono venire <u>valori finiti</u> per entrambi i limiti)

Il grafico può tagliare l'asintoto obliquo, anche in più punti.

Per conoscere la *posizione relativa* fra grafico e asintoto, devi risolvere la disequazione: $f(x) > mx + q$

2 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$

Il **segno** dipende dallo studio del segno. E la retta di equazione $x=x_0$ è un **asintoto verticale**.

Se $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ è **algebrica razionale fratta**, si ha questo tipo di limite se x_0 annulla il denominatore ma NON il numeratore.

3 $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, $|l| < \infty$

Se $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ è **algebrica razionale fratta**, si ha questo tipo di limite sse grN≤grD (sse grN<grD, *l=0*).

La retta di equazione $y=l$ è un **asintoto orizzontale**. Nelle funzioni algebriche, se c'è l'asintoto orizzontale è <u>uno solo</u> e non c'è anche asintoto obliquo.

Il grafico può tagliare l'asintoto orizzontale, anche in più punti.

Per conoscere la *posizione relativa* fra grafico e asintoto, devi risolvere la disequazione: $f(x) > l$

4 $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $|l| < \infty$

Non ha asintoti, poiché l'asintoto prevede un'infinità