Funzioni algebriche razionali fratte: limite per x tendente all'infinito.

Consideriamo $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ con N(x) e D(x) come funzioni polinomiali.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0}{b_t x^t + b_{t-1}x^{t-1} + \dots\dots + b_1 x + b_0} \quad \text{(forma generica)}$$

Se $x \to \infty$ allora N(x)$\to \infty$ perché $a_n x^n \to \infty$ (vedi funzioni polinomiali)

Se $x \to \infty$ allora D(x)$\to \infty$ perché $b_t x^t \to \infty$ (vedi funzioni polinomiali)

Se $x \to \infty$ $\frac{\mathrm{N(x)}}{\mathrm{D(x)}} \to \frac{\infty}{\infty}$ che è una **forma indeterminata. Come fare?**

Per quello che abbiamo detto sulle funzioni polinomiali (e per la proprietà di quoziente di potenze con la stessa base):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0}{b_t x^t + b_{t-1}x^{t-1} + \dots\dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n}{b_t} x^{n-t}$$

Si presentano dunque tre casi:

1) **n>t**, cioè: **n-t>0**	2) **n=t**, cioè: **n-t=0**	3) **n<t**, cioè: **n-t<0**
grN > grD	**grN= grD = n**	**grN < grD**
$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_t} x^{n-t} = \infty$ Per la **premessa 1** del file 1. Il segno dipende da $\frac{a_n}{b_t}$ o, più in generale, dallo studio del segno.	$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_t} x^{n-t} = \frac{a_n}{b_t}$ Perché per la proprietà delle potenze $x^0=1$. La retta di equazione: $y = \frac{a_n}{b_t}$ è un **asintoto orizzontale**.	$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_t} x^{n-t} = 0$ Per la **premessa 2** del file 1. La retta di equazione: $y = 0$ è un **asintoto orizzontale**.

ESEMPIO di funzione semplice che ha sia asintoti verticali che asintoti orizzontali:

La funzione omografica.

Cioè la funzione di equazione: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (iperbole equilatera traslata).

Una funzione omografica non degenera in una retta sse $c \neq 0$ e $a \cdot d \neq b \cdot c$ (cfr Wikipedia)

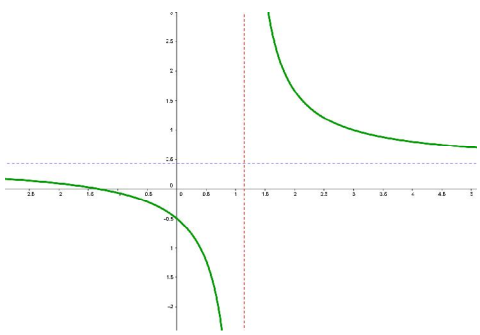
Le rette alle quali il grafico si avvicina senza toccarle, quando x tende a un valore che annulla il numeratore e <u>non</u> il denominatore oppure x tende all'infinito, sono dette **asintoti**. Le funzioni polinomiali <u>non hanno</u> asintoti)

asintoto verticale(a.v.): $x = -\frac{d}{c}$; asintoto orizzontale (a.o.): $y = \frac{a}{c}$

ES $y = \frac{3x+4}{7x-8}$ $a=3$; $b=4$; $c=7$; $d=8$

a.v.: : $x = -\frac{d}{c} = 8/7$;

a.o.: $y = \frac{a}{c} = 3/7$



Asintoti obliqui

Sse, in una funzione algebrica razionale fratta: grN = grD+1, la funzione ha un asintoto obliquo.

COME: $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ **COSI':** => $\frac{\mathrm{N(x)}}{\mathrm{D(x)}} = Q(x) + \frac{\mathrm{R(x)}}{\mathrm{D(x)}}$

Resto

Quoziente

Sse grN = grD+1 => Q(x)= mx+q

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{N(x)}}{\mathrm{D(x)}} = \lim_{x\to\infty} \left[mx + q + \frac{R(x)}{D(x)}\right] = \lim_{x\to\infty} [mx + q]$$ perché: $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{R(x)}}{\mathrm{D(x)}} = 0$ (grR < grD)

Quindi per $x \to \infty$: f(x) → mx + q

Come stabilire l'equazione di un asintoto obliquo <u>senza fare la divisione tra polinomi</u> (questo metodo è valido per qualunque tipo di funzione):

ES $y= \frac{x^3-4x+3}{x^2+3x}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ => $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x+3}{x^3+3x^2} = 1 = m$ (perchè grN=grD e $\frac{a_n}{b_t} = \frac{1}{1} = 1$)

Verifico se la funzione <u>va all'infinito come una retta</u> e, in caso affermativo (limite finito), una retta di che **pendenza**.

$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx$ => $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x+3}{x^2+3x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{x^3-4x+3-x^3-3x^2}}{\mathrm{x^2+3x}} = -\frac{3}{1} = -3 = q$

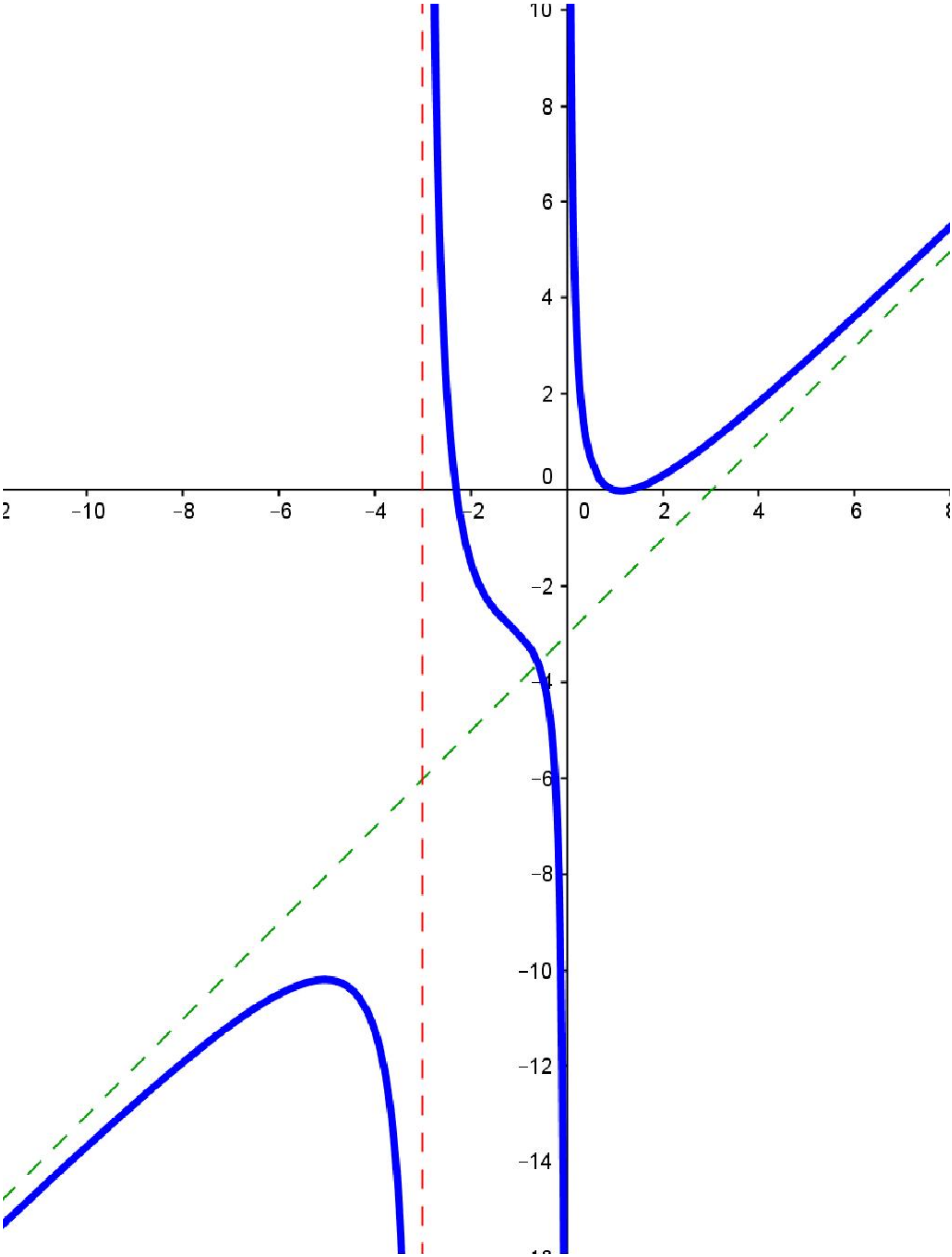
Stabilisco se la retta cui tende, all'infinito, il grafico di *f(x)* ha una **quota finita**, rispetto alla retta di equazione: *y=mx*.e, in caso affermativo (limite finito), quanto vale.

Avendo sia *m* che *q* possiamo determinare l'equazione dell'asintoto obliquo, sostituendo i valori a quelli dell' equazione esplicita di una retta:Essendo: m=1 e q = - 3, sarà:

y = mx + q => y = *x* -3 (equazione dell' asintoto obliquo).

Nella pagina seguente, il grafico della funzione di equazione: $y= \frac{x^3-4x+3}{x^2+3x}$.

Come si può vedere dal grafico, ci sono anche due asintoti verticali, le rette di equazione: *x=0* e *x=-3*.



10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−14
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6