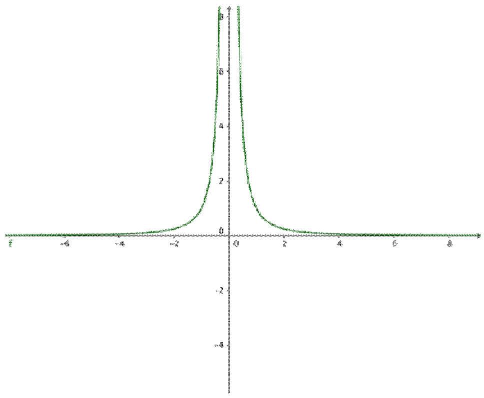
Limite *infinito* per x che tende a un valore finito: il caso delle funzioni algebriche razionali fratte

Cosa succede alle $f(x)$ *corrispondenti* ad x che si trovano in **intorni** di valori che annullano il denominatore – ma non il numeratore – di una funzione algebrica razionale fratta? $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ [con N(x) e D(x) funzioni polinomiali: vedi lezione precedente]

Consideriamo per esempio il caso di: $f(x) = \frac{1}{x^2}$. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} =$ **?**

Per scoprirlo andiamo a considerare alcuni esempi numerici inserendo in tabella i valori di *f(x)* corrispondenti a valori di *x* sempre più prossimi allo zero.



$\boldsymbol{x}$	1	$\frac{1}{2}$	10^{-1}	10^{-7}	10^{-10}	...
$\boldsymbol{\frac{1}{x^2}}$	1	4	10^{2}	10^{14}	10^{20}	...

Si *intuisce* che scegliendo valori di *x* sempre più *vicini al valore 0*, le immagini di questi, saranno valori *sempre più grandi*. Scriviamo in simboli questa osservazione nel modo seguente: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Disegnando inoltre il grafico con un qualunque software (Geogebra o Wolfram, per esempio), abbiamo una rappresentazione visiva di quanto detto.

In base a quanto visto sulle **traslazioni**, possiamo anche supporre che avremo lo stesso risultato per ogni **funzione traslata di f(x)**.

$$\text{Cioè: } \lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2} = \lim_{x\to -a} \frac{1}{(x+a)^2} = +\infty$$

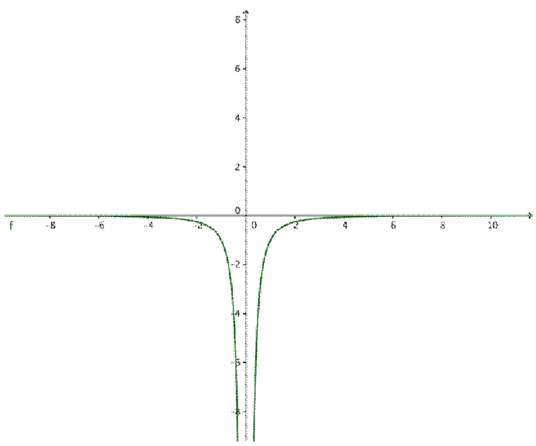
Possiamo generalizzare le conclusioni raggiunte (che sono comunque **provvisorie** e andranno *raffinate*), che possiamo ritenere valide ogni volta che c'è un valore che annulla il denominatore ma non il numeratore, nel modo seguente:

$$Se\ f(x) > 0\ \forall x \in I(x_0),\ x \neq x_0, D(x_0) = 0 \wedge N(x_0) \neq 0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{N(x)}{D(x)} = +\infty.$$

$$Se\ f(x) < 0\ \forall x \in I(x_0), x \neq x_0, D(x_0) = 0 \wedge N(x_0) \neq 0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{N(x)}{D(x)} = -\infty$$

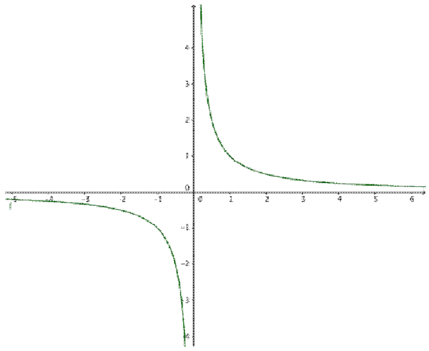
ES di questo secondo caso $g(x) = -\frac{1}{x^2}$.

In figura a destra, il grafico di *g(x)*.



Se una funzione, invece di avere un *segno uniforme*, nell'intorno del punto che annulla il denominatore, ha una situazione analoga a quella di $h(x) = \frac{1}{x}$, bisogna dividere il limite *per casi*.

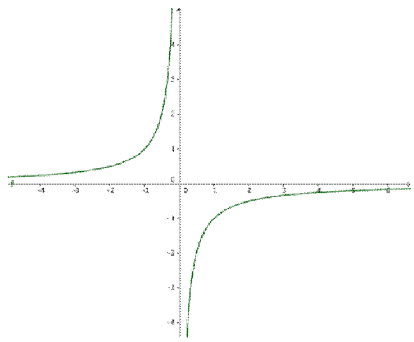
		0	
N(x)	+++++++	+++++++	+++++
D(x)	- - - - - - - - -	0	+++++
f(x)	- - - - - - - - -	∄	++++++



Studiando il segno, si vede che la funzione ha due comportamenti differenti se x tende a 0 *da sinistra* (*avvicinandoci a 0* da *valori più piccoli*) o se x tende a 0 *da destra* (*avvicinandoci a 0* da *valori più grandi*). Si indica il "tendere a 0 *da destra"*, con un apice "+" sullo 0 . Si indica il "tendere a 0 *da sinistra"* con un apice "-" sullo 0

$$\text{Quindi: } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \land \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Si può anche notare come la funzione non intersechi nessuno dei due assi del piano cartesiano ma si avvicini loro *indefinitamente*. In questo caso gli assi sono ***asintoti.*** L'*asse y* (di equazione $x = 0$) è un **asintoto verticale**, mentre l'*asse x* (di equazione $y = 0$) **asintoto orizzontale.**



Si procede analogamente per la funzione opposta $i(x) = -\frac{1}{x}$, solo che i limiti saranno invertiti: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = -\infty \land \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = +\infty$.

Se l'**insieme di definizione** di una funzione è un **intervallo limitato**, non ha senso cercare il limite per x che tende a $\pm\infty$. Sarà necessario calcolare i limiti solo se ci sono **punti di accumulazione** in cui la funzione non è definita.

Si può prendere come esempio la funzione $l(x) = \frac{x\sqrt{9-x^2}}{x^2-1}$. **I.D.**=[-3;3].

	-3		-1		0		1		3
N(x)	0	- - - -		- - - -	0	++++		++++	0
D(x)		++++	0	- - - -		- - - -	0	++++	
f(x)	**0**	- - - -	∄	++++	**0**	- - - -	∄	++++	**0**

Facendo lo studio del segno e osservando il grafico è possibile capire i quattro differenti casi da distinguere.

$\lim_{x\to 1^+} l(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 1^-} l(x) = -\infty$; $\lim_{x\to -1^+} l(x) = +\infty$; $\lim_{x\to -1^-} l(x) = -\infty$