Funzioni polinomiali

Limite infinito di una funzione per x che tende all'infinito

- Poiché esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ e i punti di una retta orientata *r*, detta **retta reale**, possiamo identificare ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ *(insieme numerico)* con un *sottoinsieme di punti* della retta *r*.
- I limiti di una funzione si calcolano per sapere che tipo di comportamento ha una funzione in ambiti critici come gli **intorni** dell'**infinito** – se sono compresi nell'I.D. – o eventuali **punti** di **accumulazione** esclusi dall'I.D.

Ma cosa sono: un **intorno**, un **intorno** di **infinito** e un **punto** di **accumulazione**?

Definizioni

0) Un **intervallo** è un sottoinsieme di numeri reali che corrisponde a un **segmento** (intervallo **limitato**) o a una **semiretta** (intervallo **illimitato**) della *retta reale*. Un intervallo può essere **chiuso** o **aperto**, a seconda che gli **estremi** appartengano o no all'intervallo.

Gli intervalli possono essere rappresentati: **graficamente** o con **linguaggio simbolico**.

Per la rappresentazione grafica adottiamo la convenzione del libro. Per la rappresentazione in linguaggio simbolico, invece, adottiamo la convenzione che una *parentesi tonda* indica che l'estremo non è incluso e una *parentesi quadra*, che l'estremo è incluso. Se l'intervallo è **illimitato**, si utilizzerà la *parentesi tonda* dalla parte in cui c'è il simbolo di infinito: ∞ .

ESEMPIO

Per **tutte** le definizioni in dettaglio, vedi libro a pag 1404.

$$[a;b)$$

1) Dato un **numero reale** x_0, si chiama **intorno completo** di x_0 un qualunque **intervallo aperto** $I(x_0)$ contenente x_0. $I(x_0) = (x_o - \delta_1; x_0 + \delta_2)$ con $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$.

Se $\delta_1 = \delta_2$, $I(x_0)$ è detto **intorno circolare**.

PROPRIETA': *l'intersezione e l'unione di due o più intorni di x_0 sono ancora intorni di x_0.*

2) Dati $a,b \in \mathbb{R}^+$, con $a < b$, chiamiamo :

- **Intorno di meno infinito** un qualsiasi intervallo aperto illimitato inferiormente:

$$\boldsymbol{I(-\infty) = (-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}}$$

- **Intorno di più infinito** un qualsiasi intervallo aperto illimitato superiormente:

$$\boldsymbol{I(+\infty) = (b; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x >} b\}$$

- **Intorno di infinito**

$$\boldsymbol{I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x < a \, V x > b\}}$$

3) Si dice che il numero reale x_0 è un **punto di accumulazione** di **A**, sottoinsieme di $\mathbb{R}$, se ogni **intorno completo** di x_0 contiene *infiniti* punti di **A**.

Premessa 1 Per valori di ***x*** *sempre più grandi* – in modulo – il valore del modulo di una *qualunque* potenza a esponente **naturale** di quei valori, diventa *sempre più grande*.

In simboli: $\lim_{x\to\pm\infty} |x^n| = +\infty\,, \quad n \in \mathbb{N}$

Si legge: “il **limite**, **per** *x* che *tende* a *più o meno infinito*, **di** *modulo di x alla n*, con **n** naturale, **è** *più infinito*”.

ES tabella con $y=x^3$

x	10^3	10^9	10^{21}	…	$x\to\infty$
$y=x^3$	10^9	10^{27}	10^{63}	…	$y\to\infty$

Premessa 2 Per valori di ***x*** *sempre più grandi* – in modulo – il valore dell’inverso di una *qualunque* potenza a esponente naturale di quei valori, diventa *sempre più piccolo* (non c’è più bisogno di considerare il modulo, perché lo zero non ha segno).

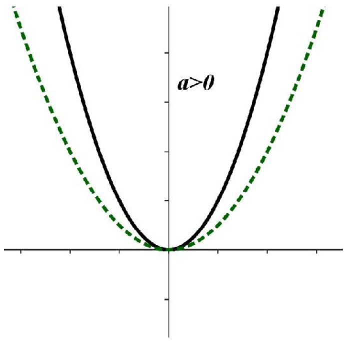
In simboli: $\lim_{x\to\pm\infty} x^{-n} = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}$

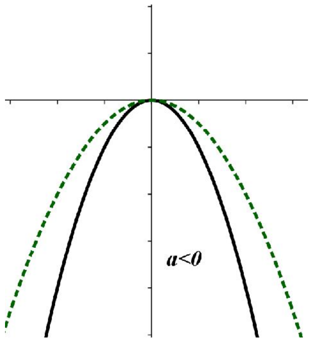
Si legge: “il **limite**, **per** *x* che *tende* a *più o meno infinito*, **di** *x alla meno n*, con **n** naturale, **è** zero”.

ES tabella con $y=x^{-3}$

x	10^3	10^{10}	10^{27}	…	$x\to\infty$
$y=x^{-3}$	$1/10^9$	$1/10^{30}$	$1/10^{81}$	…	$y\to 0$

Premessa 3 $y = a\cdot x^{2n}$ può avere solo due tipi di grafico:



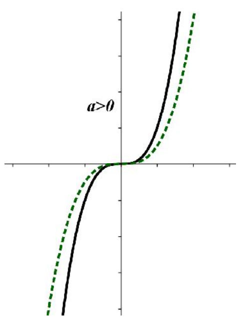


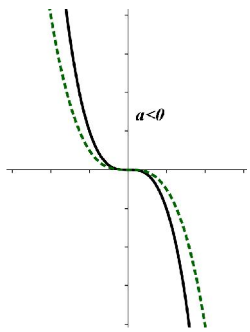
Se l’esponente di *x* è **pari** allora $y = a\cdot x^{2n}$ è **simmetrica** rispetto all’*asse x*.

I limiti per *x tendente a più e a meno infinito* saranno pertanto **uguali** e entrambi infiniti (per quanto detto nella **premessa 1**). Il **segno** di questi limiti dipende dal segno di *a*.

La **velocità** con cui |*f(x)*| andrà all’infinito dipenderà da quanto è grande **n**. Approfondiremo questo aspetto al momento di fare un riepilogo dei limiti studiati.

Premessa 4 $y = a\cdot x^{2n+1}$ può avere solo due tipi di grafico:





Se l'esponente di x è **dispari** allora $y = a \cdot x^{2n+1}$ è **simmetrica** rispetto ad O.

I limiti per x *tendente a più e a meno infinito* saranno pertanto **opposti** e entrambi infiniti (per quanto detto nella **premessa 1**). Il **segno** di questi limiti dipende dal segno di a.

TEOREMA

Il limite di ogni **funzione polinomiale** - per x che tende all'infinito – **è** il limite del suo termine di grado massimo,

DIMOSTRAZIONE

Una **funzione polinomiale generica** può essere rappresentata così:

$$y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \quad \dots \quad + a_1 \cdot x + a_0$$

Con la convenzione di indicare il coefficiente della potenza a *esponente* k con il *pedice* k: a_k è così coefficiente di x^k. In scrittura più compatta: $y = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$

Dove $\sum_{k=0}^{n}$ si legge: "Somma per k che va da 0 a n".

Per **dimostrare** questo teorema, basta *raccogliere a fattor comune* x^n. E *applicare le* **premesse**.

Raccogliere a fattor comune x^n significa dividere ciascun termine del polinomio per x^n . Ma, per la *proprietà di quoziente di potenze con la stessa base*, dividere ciascun termine del polinomio per x^n, equivale a sottrarre **n** all'esponente di ciascun termine del polinomio. Ottenendo:

$$y = x^n \cdot (a_n \cdot x^{n-n} + a_{n-1} \cdot x^{n-1-n} + \quad \dots \quad + a_1 \cdot x^{1-n} + a_0 \cdot x^{0-n})$$

Facendo i conti, la funzione diventa perciò:

$$y = x^n \cdot (a_n + a_{n-1} \cdot x^{-1} + \quad \dots \quad + a_1 \cdot x^{1-n} + a_0 \cdot x^{-n})$$

Se ora puoi credere che:

il *limite della somma* è uguale alla *somma dei limiti*

e il *limite di un prodotto* e uguale al *prodotto dei limiti*.

$$\lim_{x \to +\infty} x^n \cdot (a_n + a_{n-1} \cdot x^{-1} + \quad \dots \quad + a_1 \cdot x^{1-n} + a_0 \cdot x^{-n}) = \lim_{x \to +\infty} x^n \cdot a_n$$

Perché tutti gli altri termini hanno esponente negativo o – che è lo stesso – sono l'*inverso di una potenza a esponente naturale*, e per la **premessa 2**, hanno come **limite** 0.

Una volta che vi siete convinti della TESI di cui sopra, e che avete capito le **premesse**, dovreste capire com'è l'***andamento generale*** di una funzione polinomiale e, quindi, come disegnare *approssimativamente* il suo grafico (**grafico probabile**).

Per sapere quante *gobbe* ha, dovremo prima studiare come si calcolano le **derivate** e come utilizzarle.

Nel frattempo però, sapendo trovare le **intersezioni** con l'asse x (che sono al massimo n reali e non sempre distinte) e sapendo come si comporta la funzione all'infinito, qualcosa potete tracciare. Per il resto c'è **GEOGEBRA**.