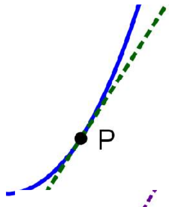
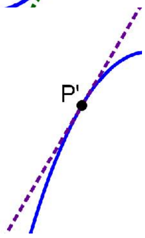
Concavità e Punti di Flesso

Per tracciare *per bene* il **grafico** di una funzione $f(x)$ è necessario anche conoscere l'andamento della **concavità**.

Per definire se in un intorno di un punto **P**$(x_0;y_0)$ la **concavità** del grafico di $f(x)$ sia **positiva** (rivolta verso l'alto) o **negativa** (rivolta verso il basso), si esamina la posizione dei punti della curva rispetto alla retta $\mathbf{t}_{\mathrm{P}}$, tangente in **P**.



DEF Se, in corrispondenza di ogni valore dell'intorno $I(x_0)$, la curva è *al di sopra* della tangente, la **concavità** è **positiva**.

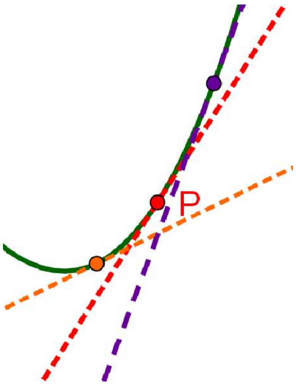


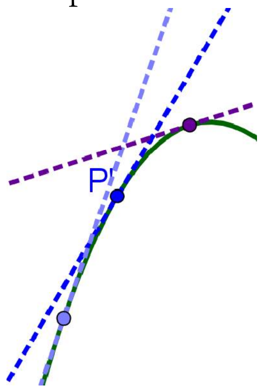
DEF Se, in corrispondenza di ogni valore dell'intorno $I(x_0)$ la curva è *al di sotto* della tangente, la **concavità** è **negativa**.

Potremmo servirci della **definizione**, per capire cosa fare per studiare la **concavità**, ma ciò richiederebbe molti conti.

Oppure possiamo fare considerazioni più **qualitative**.

Osserva come la curva della figura precedente è **crescente** sia in un intorno di **P**, sia in un intorno di **P'**. Le *pendenze* delle *tangenti* sono quindi **positive** ma, mentre nell'**intorno** di **P** le pendenze delle tangenti alla curva **aumentano** al crescere delle *x* (cioè la funzione derivata prima, è **crescente**), nell'intorno di **P'** le pendenze delle tangenti alla curva **diminuiscono** al crescere delle *x* (cioè la funzione derivata prima è **decrescente**).





Ricapitolando: sse una funzione ha concavità positiva in un intervallo, in quell'intervallo la sua **derivata prima** sarà **crescente** e sse una funzione ha concavità negativa in un intervallo, in quell'intervallo la sua **derivata prima** sarà **decrescente**

Considerando la **funzione derivata prima** $f'(x)$, per sapere in quali intervalli sarà crescente e in quali decrescente, abbiamo visto che si dovrà studiare il segno della sua la derivata. Dal punto di vista dei calcoli, devi seguire i procedimenti già visti e applicarli alla funzione $f'(x)$.

La derivata della derivata prima si chiama **derivata seconda**. E la indicheremo: $f''(x)$

Studiando il **segno** della **derivata seconda** scopriremo l'andamento della **concavità** della funzione $f(x)$: *dove* ha concavità positiva, *dove* ha concavità negativa e *dove* cambia di concavità (**punti** di **flesso**).

Sia $\boldsymbol{P}(x_P; f(x_P))$ un punto di flesso per una funzione $f(x)$. Se la **tangente** al grafico nel punto **P** è **orizzontale** (cioè se $f'(x_P) = f''(x_P) = 0$) allora il **flesso** è **orizzontale**.

Se la **tangente** al grafico nel punto **P** è **obliqua** (cioè se $f'(x_P) \neq 0; = f''(x_P) = 0$) allora il **flesso** è **obliquo**.

Se la funzione è derivabile due volte in tutti i punti *vicini a* **P**, e la derivata prima *tende a infinito* per *x-->x*$_P$, la tangente è "verticale", e se la derivata seconda cambia segno si parla di **flesso verticale**.

Ma, applicando le **derivate** solo alle **funzioni polinomiali**, queste *stramberie* non accadranno: le funzioni polinomiali possono avere solo **flessi orizzontali** o **flessi obliqui**.

ESEMPIO

$f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 7$

$$f'(x) = 24x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 48x - 24$$

$$f''(x) \geq 0 \; per \; x \geq \frac{1}{2}$$

Quindi la curva di si troverà al di sopra della retta tangente se $x \geq 1/2$.

Studiando poi la derivata prima, possiamo scoprire se il punto di flesso è orizzontale o obliquo.

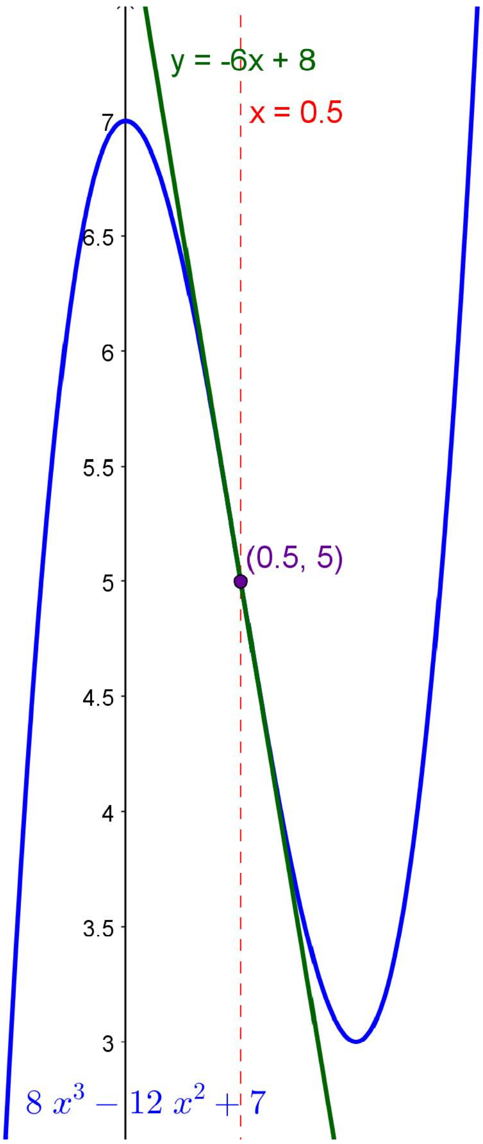
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 24\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 24\left(\frac{1}{2}\right) = -6$$

Il punto di **flesso** è **obliquo**,: il valore della derivata prima infatti è negativo e possiamo

anche vedere nell'immagine, la pendenza della tangente è negativa.

Il punto di flesso è $\left(\frac{1}{2}; 5\right)$.

Fai tu i conti necessari a completare lo studio della funzione.



ESERCIZI

Traccia il grafico delle seguenti funzioni:

1) $p_1(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{5}{4}x^2 + \frac{9}{8}x$ 2) $p_2(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}$

3) Scrivi l'equazione di $p_3(x)$, sapendo che è una cubica con un flesso obliquo di pendenza $-\frac{3}{4}$ nel punto $F = (1; -2)$ e che interseca l'*asse y* nel punto $Q(0; -1)$