# Coerenza, verità, bellezza

## Sommario

Il XX secolo fu un secolo di **rivoluzioni** anche per le scienze matematiche, fisiche e naturali. Furono rivoluzionate teorie e conoscenze e furono aperti nuovi filoni di ricerca ma, soprattutto, cambiò radicalmente la **concezione** che si aveva delle scienze stesse.

Parlerò oggi, in particolare, di alcuni aspetti inerenti la **crisi** dei **fondamenti** della **matematica**.

Partirò dall'analizzare la concezione di scienze maggioritaria fino a fine Ottocento (in Italia, grazie a Gentile, Croce e al Fascismo è perdurata *fuori tempo massimo*), poi presenterò brevemente le **cause** di questo cambiamento: le **geometrie non euclidee** e le **antinomie della teoria ingenua degli insiemi**.

Vedremo come il filo rosso che lega questi cambiamenti è il concetto di **infinito** o meglio sono i concetti di infinito.

## Introduzione

Quanto vado a trattare – e cioè elementi di **storia della matematica** – è troppo poco presente nelle ore curricolari (specialmente dei licei non scientifici). I nostri studenti usano strumenti di cui non conoscono neanche un briciolo di **storia**. Mi rendo conto quanto sia difficile tenere assieme tutto. Spero perciò che progetti come questo possano divenire sistemici.

Tra le tante scelte possibili, dovendomi occupare di matematica nel **Novecento**, ho scelto di trattare le cosiddette **geometrie non euclidee** – nonostante siano un prodotto più propriamente dell'Ottocento che del Novecento – perché emblematiche dei frutti che la crisi dei fondamenti della matematica ha portato, sulla lunga distanza:

- il superamento di una visione neoplatonica della matematica (giungendo a considerare **convenzionali** concetti prima ritenuti **verità**);
- la necessità di modificare la concezione dello **spazio fisico** in cui viviamo;
- l'imprescindibilità della dialettica **rigore – intuizione** all'interno della matematica;
- il rapporto indissolubile tra **concetto** e sua **rappresentazione** (quindi la questione dei **linguaggi**);
- il ripensamento del concetto di **infinito**.

Inoltre le geometrie non euclidee credo siano emblematiche della **bellezza** della matematica e, più in particolare, della bellezza che deriva dal rinunciare alla ricerca della **verità** e accontentarsi invece della **coerenza**.

## Scienza e storia della scienza

### Argomenti pro e contro la possibilità di una storia della scienza

Ludovico Geymonat, *Lineamenti di filosofia della scienza*, 2006, Novara, Utet Università, pagg 70-72 [grassetti e sottolineature miei; corsivi al posto dei virgolettati]:

“E’ noto che, secondo **Galileo Galilei**, la matematica sarebbe in grado di conseguire conoscenze pari, per qualità non per quantità, a quelle di dio, cioè **assolute**. [...]

Questa concezione fu accolta da pressoché tutti i contemporanei di Galileo e da gran parte degli scienziati fino alla metà dell’Ottocento.

In base a essa lo sviluppo della scienza consisterebbe nell’aggiunta di nuove **verità assolute** a quelle già in precedenza conseguite [...]. Si tratta della così detta interpretazione *cumulativa* della crescita della scienza, che ancora oggi trova non pochi sostenitori tra gli studiosi che non si sono specializzati in storia della scienza [...].

Ecco ciò che scrisse **Giovanni Gentile** [1875; 1944] nel volume *Teoria generale dello spirito come atto puro* [ancora nel 1916]:

> Orbene, può esserci della scienza [...], vera e propria **storia**? E’ evidente che è da escludere senz’altro il concetto di una **storia unica** della scienza, perché la scienza si rifrange nelle scienze, ciascuna delle quali (in quanto scienza e non filosofia) è separata dalle altre, né ha perciò rapporti essenziali con esse. Ma oltre che particolare, ogni scienza è [...] empirica e **dogmatica**, perché presuppone di *conoscere il conosciuto* [...]. Essendo la realtà del conoscere **determinata**, o si conosce o non si conosce. Se in parte si conosce, e in parte no, vuol dire che essa ha parti separabili: e allora c’è quella che si conosce totalmente, e quella che totalmente si ignora. Di qua della **verità**, che si pone in maniera **irriformabile**, non c’è altro che **errore**; e tra **errore** e **verità**, l’**abisso**. La storia delle scienze infatti ha assunto tante volte l’aspetto di e una <u>enumerazione degli errori e dei pregiudizi che appartennero tutt’al più alla preistoria, ma non alla storia della scienza</u>. La storia dovrebbe essere lo svolgimento della scienza: e la scienza come tale non può avere svolgimento, perché presuppone una **verità perfetta**, alla quale non si può aderire per gradi, ma nella quale converrebbe saltare di botto: quindi il concetto, tutto proprio delle scienze naturalistiche, della **scoperta**, dell’**intuizione**, [...].

Il punto centrale dell’argomentazione di Gentile è che *la scienza come tale non può avere svolgimento*: essa possiede *parti separabili* ciascuna delle quali o è totalmente conosciuta o è totalmente ignorata. Ne consegue che l’apparente svolgimento delle scienze sarebbe l’aggiunta alle parti già totalmente conosciute, di qualche altra parte di nuovo totalmente conosciuta: è una tesi che richiama quella da noi denominata *crescita cumulativa* della scienza, salvo che Gentile vi aggiunge in più un’altra affermazione, parimenti insostenibile, secondo le concezioni epistemologiche moderne, secondo cui alla conoscenza (perfetta) di ogni singola parte della scienza non si potrebbe pervenire che con un salto, cioè di botto, per intuizione.

Ma un’**osservazione obiettiva** del modo in cui cresce la scienza ci mostra, invece, che essa si sviluppa ben diversamente, e cioè rimettendo in discussione i principi delle teoria prima accettate, correggendone i risultati, mai perfetti, precedentemente acquisiti o comunque delimitandone la validità, stabilendo sempre nuovi rapporti tra una scienza particolare e l’altra, arricchendo e precisando il campo delle nostre osservazioni, avvalendosi dei suggerimenti che le provengono dalle più ardite realizzazioni della tecnica, ecc. E’ tutto un movimento di idee di ipotesi, di metodi, di sperimentazioni che non può venire in nessun modo inquadrato dallo schema gentiliano, rivelando l'effettiva esistenza di una **dialettica** molto complessa, del massimo interesse sia per lo scienziato, sia per il filosofo."

Sei d'accordo con questa conclusione di Geymonat? Se non lo sei, spero lo sarai alla fine di questa presentazione. Osserva intanto come siano seguaci di Gentile, curiosamente, sia coloro che non ritengono Cultura la scienza – quindi inferiore alle arti e alle lettere – sia coloro che ritengono la scienza l'unica attività umana degna di nota, al contrario delle arti e delle lettere!

# Recenti problemi di filosofia della matematica

Ludovico Geymonat, *Lineamenti di filosofia della scienza*, 2006, Novara, Utet Università, pagg 11-23 [grassetti e sottolineature miei; corsivi al posto dei virgolettati]:

## Il criterio di evidenza in matematica e la sua crisi

"[...] gli Elementi di *Euclide* furono considerati per secoli e secoli l'espressione più elevata della ragione umana, il **modello** a cui ci si doveva ispirare per esporre una qualsiasi trattazione in forma esente da dubbi. Si pensi a B. Spinoza: che, per dimostrare la validità del proprio sistema metafisico si sforzò di esporlo *more geometrico*; oppure si pensi a I. Newton che, per dare una forma scientificamente incontestabile alla sua meccanica, diede ai *Principia* una struttura manifestamente analoga a quella degli Elementi euclidei."

Qui di seguito una schematizzazione della struttura euclidea – scritta in un linguaggio moderno: successivo alla riorganizzazione che **David Hilbert** (1862-1943) diede de gli *Elementi* nel *Fondamenti della geometria*, pubblicato nel 1899:

**OGGETTI fondamentali**

(punto, retta, piano, insieme – continuità – appartenenza, incidenza, congruenza, ordine)

**hanno le seguenti proprietà**: →

**Postulati e Assiomi**

(anelli fondamentali delle catene dimostrative dei primi teoremi)

↓ **servono per:**

**DEFINIRE**

(precisare le caratteristiche peculiari di cui vorremmo che godano gli oggetti, utilizzando parole **già definite**)

↓ **cosa**

**OGGETTI**

**SOSTANTIVI** (poligoni, angoli, ecc), **AGGETTIVI** (uguaglianza, similitudine, equivalenza, ecc.) e **VERBI** (addizionare, sottrarre, trasformare, ecc)

↓ **servono per:**

**DIMOSTRARE**

(Costruire catene di proposizioni, ciascuna già dimostrata e ***conseguenti*** le une alle altre, che abbia come primo anello l'ipotesi e come ultimo la tesi e come anelli intermedi postulati, assiomi o teoremi già dimostrati)

↓ **cosa:**

**TEOREMI**

(proprietà degli oggetti matematici. Sono composti di una premessa, o ipotesi, e di una conclusione, o tesi)

← **riguardano**

Fino ai primi anni dell'Ottocento Assiomi (validi per tutte le scienze) e postulati (specifici dell'argomento in esame) erano ritenuti da accogliere in base alla loro **evidenza intuitiva**.

"E' nell'Ottocento che il criterio dell'evidenza entrò apertamente in crisi nella matematica, crisi innanzitutto provocata dalla scoperta delle così dette *geometrie non euclidee* [...] e in seguito dagli sviluppi della *teoria (ingenua) degli insiemi* [...]."

Come già detto, non si chiede più agli assiomi e ai postulati di essere veri, o evidenti, ma di dare luogo a **teorie coerenti**:

## Coerenza (e altro)

Una **teoria** (un insieme di affermazioni di cui, all'interno di un *contesto regolato*, si può determinare se siano **vere** o **false**) si dice **coerente** se dalla teoria non si può derivare **sia** un'affermazione **A**, **sia** la negazione di **A**: **non-A**. Un insieme di postulati e assiomi [qui sotto useremo il termine **assiomi** per indicare entrambi, come suggerito da Geymonat] è *ben assortito* se questi sono:

- **Compatibili.** Cioè **coerenti**.
- **Indipendenti.** Quanto dedotto da assiomi dell'insieme **non** si può dedurre da altri assiomi dell'insieme.
- **Necessari.** Quanto derivato da assiomi dell'insieme **non** si può derivare da altri assiomi **esterni** all'insieme.
- **Sufficienti.** Il sistema di assiomi è **completo**, cioè da essi si riescono a dedurre *tutti* i teoremi e *tutte* le proprietà inerenti la *teoria* [questa è una definizione intuitiva: la definizione matematica è infatti troppo tecnica per questo contesto].

## Prime scosse: brevissima storia del quinto postulato

Iniziamo a vedere come sia il concetto di **infinito** a far *tremare* l'apparentemente solido edificio ottocentesco della matematica: una tipica espressione dell'*horror infiniti* (che, da Aristotele in poi non ha mai difettato in adepti) infatti è il sospetto con il quale il matematico greco **Euclide** (III secolo a.C., Alessandria) guarda al quinto dei postulati de gli *Elementi*

Il quinto postulato asserisce l'unicità della parallela condotta per un punto esterno a una retta data.

La comprensione di tale postulato richiede un ragionamento sull'infinito e, rispetto agli altri è più complesso, meno immediato, meno **evidente**. Per questi motivi Euclide e i matematici che studiarono la sua opera, per duemila anni cercarono di dimostrare quel postulato o di sostituirlo con proposizioni più evidenti.

Nei secoli si sprecarono i tentativi di ricavare il quinto postulato dai primi quattro; di dimostrarlo, quindi. E, fra le altre, non potevano mancare le dimostrazioni "per assurdo": negando il quinto postulato, si sarebbe dovuti incappare in un'incoerenza talmente profonda da minare l'intera geometria euclidea – si pensava – dimostrando, quindi, la necessità di tale postulato.

E invece si finì per “scoprire” (o inventare, a seconda della vostra posizione filosofia nei confronti della matematica) altre geometrie. Geometrie in cui, lasciando inalterati gli altri quattro postulai e modificando pochi elementi, per un punto esterno a una retta passano infinite rette parallele alla prima (**geometria iperbolica**), o non ne passa nessuna (**geometria ellittica**).

I pionieri delle geometrie cosiddette non euclidee furono matematici dell’Ottocento: Gauss, Bolyai, Lobachevskij, Riemann, ma il modello di cui vi parlerò, modello della geometria iperbolica, è stato divulgato nel 1902.

## Il modello per la geometria iperbolica di Poincaré[1]

H. Poincaré (1854 – 1912) , La Science et l’Hypothèse, Cap. IV: “*Immaginiamo un mondo rinchiuso in una grande sfera e sottoposto alle leggi seguenti: la temperatura non è uniforme: è massima al centro e diminuisce man mano che ce ne si allontana, per ridursi allo zero assoluto quando si raggiunge la sfera dove il mondo è racchiuso.*

*Supporrò inoltre che, in un siffatto mondo, tutti i corpi abbiano lo stesso coefficiente di dilatazione, in maniera che la lunghezza di un regolo qualunque sia proporzionale alla sua temperatura assoluta; e infine un oggetto trasportato da un punto all’altro, la cui temperatura sia differente, si metta immediatamente in equilibrio termico con il nuovo ambiente.*

*Un oggetto mobile diverrà allora via via più piccolo man mano che si avvicinerà alla sfera limite.… se questo mondo è limitato dal punto di vista della nostra geometria abituale, sembrerà però infinito ai suoi abitanti. Quando questi, in effetti, vogliono avvicinarsi alla sfera limite, si raffreddano e diventano via via più piccoli, sì che essi non possono mai raggiungere la sfera limite”.*

La sfera limite di cui **Poincaré** parla nell’estratto precedente, rappresenterà pertanto, per gli abitanti dello *strano mondo* che essa racchiude, l’**infinito**.

Il *modello di Poincaré per la geometria iperbolica* è un cerchio $C$ di centro **O** e raggio **r**: (una sezione del mondo sferico sopra descritto) che, pur essendo limitato “dal di fuori”, al suo “interno” rappresenta un piano **infinito**. Com’è possibile? Per capirlo servono alcuni passi: innanzitutto definire quali sono le **rette** in questo piano, e poi come è definito il concetto di **distanza** tra due punti.

Tutti gli elementi di cui tratteremo si possono interpretare come oggetti del modello o come oggetti della geometria euclidea: Nel primo caso li indicherò tra virgolette.

**DEF1** In questo “piano” le “**rette**” corrispondono a diametri o ad archi di circonferenze *ortogonali* alla circonferenza che delimita $C$ (le tangenti nel punto d’intersezione sono ortogonali).

**DEF2** Definiamo la “**distanza**” fra i punti **P** e **Q** della **fig. 11** nel modo seguente[2]:

1 Coxeter H. S. M., 1957, *Non-Euclidean Geometry*, Toronto, University of Toronto Press

2 I numeri delle figure corrispondono alle **pagine** del PDF di **presentazione**, dove tali figure si trovano.

$$d(P;Q)=\left|\ln\frac{\overline{PB}\cdot\overline{QA}}{\overline{PA}\cdot\overline{QB}}\right|$$ si avrà: $$\lim_{P\to A}\left|\ln\frac{\overline{PB}\cdot\overline{QA}}{\overline{PA}\cdot\overline{QB}}\right|=\infty$$ perciò i segmenti **PA** e **QB** saranno "semirette", in questo modello; e la corda **AB** sarà una "retta"!

e anche: $$\lim_{P\to Q}\left|\ln\frac{\overline{PB}\cdot\overline{QA}}{\overline{PA}\cdot\overline{QB}}\right|=\left|\ln\frac{\overline{QB}\cdot\overline{QA}}{\overline{QA}\cdot\overline{QB}}\right|=\ln 1=0$$ , come ci si aspetta che sia...

La circonferenza che delimita il cerchio $C$ , rappresenta in tale modello **l'infinito**. Un infinito che sta lì: proprio sotto i nostri occhi.

Le proprietà della geometria iperbolica sono ricche, stupefacenti e complesse. Vi segnalo un applet che vi consente di visualizzarne caratteristiche e "funzionamento": http://progettomatematica.dm.unibo.it/NonEuclidea/File/applet%20Non%20Euclid.htm.

In questo modello, come mostrato in **fig. 12.a**, per un punto esterno a una retta passano infinite rette *parallele* (con lo stesso punto all'infinito) e *iperparallele* (con punti all'infinito non coincidenti) a questa.

In questo modello, tra le altre cose, la **somma** degli **angoli interni** di un triangolo può è inferiore a 180° (**fig. 12.b**), ed è possibile la **quadratura del cerchio** (cioè trovare un quadrato equivalente a un cerchio dato)!

Capite perché, di fronte a un fenomeno del genere, DEVE cambiare il concetto di *verità* matematica? Capite perché gli **elementi fondamentali** smettono di essere considerati concetti primitivi ma divengono *oggetti* di cui si specificano le proprietà esclusivamente tramite gli assiomi? Punto, retta, piano e altri, potrebbero essere sostituiti, come dice **Hilbert**, da tavoli, sedie, boccali da birra e altri oggetti. E se la geometria tratta di "cose", gli assiomi non sono certo **verità evidenti in sé**, ma devono essere considerati **arbitrari**.

Ma, anche per approfondire il secondo argomento di cui ci stiamo occupando – e cioè l'evoluzione del concetto di **infinito** – è interessante scoprire cosa accade *tassellando* un piano iperbolico. Cioè ricoprendolo completamente con **figure congruenti**, applicando *iterativamente* una **simmetria assiale**.

All'interno del modello della geometria iperbolica di Poincaré la simmetria assiale si fa per **inversione circolare**: una trasformazione che vale la pena conoscere, oltre che per tassellare il piano iperbolico, anche in sé e per sé.

## L'inversione circolare[3]

**Fig**. 14 Sia dato un cerchio ***C*** di centro **O** e raggio ***r***=1 (per semplificarci un po' i conti, ma si può fare utilizzando circonferenze di raggio qualunque). Ad ogni punto **P** del piano associamo un punto **P'** della semiretta **OP** tale che **OP·OP' =** $r^2$ =1.

La trasformazione che porta i punti **P** nei punti **P'** si dice inversione circolare, il cerchio ***C*** si dice *cerchio d'inversione*, il punto **O,** *centro d'inversione*. L'inversione è definita su tutto il piano escluso il punto **O**.

[3] Agazzi E. - Palladino D., 1998, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Milano, Arnoldo Mondadori

In **coordinate polari**, e ponendo $r$ = 1, potremmo scrivere l'equazione dell'inversione nel modo seguente: $\rho' = \frac{1}{\rho}$.

L'inversione circolare stabilisce una **corrispondenza biunivoca** tra i punti del piano interni al cerchio, escluso il punto O, e i punti del piano esterni al cerchio.

Per poter estendere il campo di esistenza a tutto il piano bisogna dunque introdurre un *punto all'infinito* che sia **immagine di O** e, reciprocamente, ammettere che l'inversione circolare porti tale punto in O.

Infatti, se **P** si avvicina ad **O**, e quindi $\rho$ a zero, **P'** va verso il punto all'infinito della retta **OP**, e, man mano che **P** va all'infinito **P'** si avvicina ad O (riesci a vederlo?).

Si pone un problema evidente: in un piano euclideo ogni retta passante per O individua *due infiniti*. Perché quanto sopra sia consistente, dovremo innanzitutto far coincidere questi due infiniti in un punto solo.

Inoltre vi sono infinite rette passanti per O, quindi, oltre che identificare "gli infiniti di ciascuna retta" dovremo identificare gli infiniti di tutte le rette.

Di fatto il *centro d'inversione* diventa il corrispondente di tutti i punti all'infinito delle infinite rette passanti per O, cioè di tutti i punti all'infinito del piano.

Questo fatto comporta che l'inversione circolare trasformi *rette*, non passanti per **O**, in *circonferenze* passanti per **O**, infatti: il punto all'infinito della retta, apparentemente doppio nella raffigurazione euclidea, va a chiudersi nel centro d'inversione. **Fig. 15.**

Per lo stesso motivo l'inversione circolare trasforma *circonferenze* passanti per **O** in *rette* e *circonferenze* non passanti per **O** in *circonferenze*.

Se riesci a considerare una retta come una circonferenza di raggio infinito potresti sintetizzare quanto prima nella seguente proprietà: *l'inversione circolare trasforma circonferenze in circonferenze*.

Le modalità di trasformazione delle rette da parte dell'inversione circolare sono sintetizzate nella **fig 16.** che ci mostra la trasformata per inversione di una *scacchiera* (della parte di scacchiera esterna alla circonferenza d'inversione).

## Trasformate per inversione circolari di alcune curve classiche[4].

La trasformata per inversione di una **parabola** sarà una cardioide (**fig. 17.a**).

Un'**iperbole equilatera** *tangente* alla circonferenza si trasforma nel simbolo "sintattico" dell'infinito (una *lemniscata*): i punti di tangenza restano uniti mentre i rami vanno a convergere nel centro d'inversione. **Fig 17.b.**.

Ho ottenuto le figure che hai visto con **Geogebra**! Nel nono menu da sinistra trovi i pulsante dell'inversione circolare: ragionando su come si comporta l'inversione circolare nel trasportare l'infinito al finito, dovresti capire come fare per ottenere le curve viste.

## Tassellazioni del piano iperbolico e immagini dell'infinito

[4] Maor E., 1987, *To infinity and beyond*, Boston, Birkhauser

Torniamo al modello della geometria iperbolica di Poincaré e alle tassellazioni del piano iperbolico: in **fig. 18.a** viene mostrato cosa accade utilizzando triangoli equilateri. In **fig. 18.b** una tassellazione mediante quadrati. E, dulcis in fundo, ecco in **fig.19**, cosa si può combinare utilizzando ***angeli e demoni*** [Escher combina una *tassellazione* per esagoni ad una per rettangoli ottenendo uno dei suoi famosi circle: “angels and devils”]! Questa nuova geometria ha decisamente a che fare con **immagini** (finite) **dell’infinito**.

# Salsa d’infinito: ingredienti di facile reperibilità

Abbiamo nominato già più volte l’infinito, è ora di parlarne più approfonditamente.

Se vi chiedessi secondo voi cos’è l’**infinito**, la maggior parte di voi proporrebbe sinonimi di **illimitato**, di **infinitamente grande**, si riferirebbe alla possibilità di *aggiungere* sempre; al “sempre più grande” illustrato dalla banale immagine in **fig.**

I più attenti parlerebbero della possibilità di dividere una grandezza in parti sempre più piccole, o di avvicinarsi *quanto vogliamo* a un punto su una retta, o a un valore numerico; di poter zoomare, nell’ambito dei numeri reali, quanto vogliamo; parlerebbero quindi anche dell’**infinitamente piccolo** rappresentato rozzamente in **fig.** (particelle subatomiche).

Tecnicamente si tratta di esempi di **infinito potenziale** (Domingo Paola):

L’infinito potenziale è da intendersi come *processo* che può andare avanti quanto si vuole, senza esaurirsi, senza mai completarsi e, in tal senso, è un concetto essenzialmente negativo: è ciò che *non è* finito.

Secondo tale accezione, *infinito* non è ciò al di là del quale non c’è nulla, ma ciò al di là del quale c’è sempre qualcosa.

Per esempio, considera la successione dei numeri naturali: 1, 2, 3, 4, … i puntini di sospensione indicano che puoi andare avanti *quanto vuoi*: infatti dopo aver raggiunto un numero $n$ qualunque, puoi proseguire dicendo semplicemente $n+1$.

A ogni passo ottieni sempre un numero finito e ben preciso, ma puoi proseguire quanto vuoi, perché dopo i numeri che hai già elencato ce ne sono tanti altri. Quanti? Quanti ne vuoi, in linea di principio: *infiniti*.

Si può pensare a un infinito potenziale per accrescimento (aggiunta di parti nuove alle grandezze considerate) e per divisione (suddivisione di una grandezza data in parti sempre più piccole): da una parte si tende verso *l’infinitamente grande* e pertanto **l’illimitato**; dall’altra si tende verso *l’infinitamente piccolo*, ossia si considerano grandezze sempre finite, ma piccole quanto si vuole, anche se sempre maggiori della grandezza nulla.

Ma in una linea di lunghezza finita (una semicirconferenza, per esempio) vi sono tanti punti quanti ve ne sono su un’intera retta (perciò: infiniti). E ciò si può dimostrare con un ragionamento abbastanza semplice, ben *rappresentato* dalla **fig. 23**. E quindi non c’è bisogno di andare né nell’infinitamente grande né nell’infinitamente piccolo per trovare l’infinito: può nascondersi benissimo lì: sotto i nostri occhi.

E questo della semicirconferenza è un esempio di **infinito attuale** (Domingo Paola):

L'**infinito attuale** (in atto) è qualcosa di compiuto al di là del quale non c'è nulla "da aggiungere": non è un processo, ma una qualità, una proprietà che può essere o meno posseduta.

Dal punto di vista della matematica moderna i punti di un segmento sono infiniti e costituiscono un infinito attuale e non potenziale, in quanto sono già dati, in un tutto unico, e non si costruiscono per accrescimento come avviene per la successione dei numeri naturali, né si ottengono per divisioni successive.

**Aristotele** nega la possibilità di un infinito in atto: ne nega sia l'esistenza, sia la possibilità di concepirlo. Quando si parla dell'*horror infiniti* della filosofia aristotelica, ci si riferisce proprio al concetto di infinito attuale che, appunto, Aristotele riteneva inconsistente. E non è l'unico.

**Georg Cantor** (1845 - 1918) scrive in proposito: « L'infinito attuale si presenta in tre contesti: in primo luogo quando si realizza nella forma più completa, in un'essenza mistica completamente indipendente, *in Dio*, che io chiamo Infinito Assoluto o, semplicemente, Assoluto; in secondo luogo quando si realizza nel mondo contingente, creato; in terzo luogo quando la mente lo coglie *in abstracto* come una grandezza, un numero o un tipo di ordine matematico. »

Per procedere, facciamo prima un passo indietro: come si fa a stabilire se un insieme è infinito oppure no?

- Come in ogni misura che si rispetti, si deve partire dallo stabilire un'**unità di misura** e sarete d'accordo che l'insieme dei **numeri naturali N** è una buona unità di misura infatti è sia semplice sia infinito.

- L'azione del **misurare** un oggetto consiste nel *confrontare* l'oggetto con l'unità di misura. Nel nostro caso, confrontare diventa stabilire (o meno) una **corrispondenza biunivoca** (uno a uno) tre gli elementi dell'insieme che vogliamo misurare e il nostro insieme unità di misura.

Facendo questo gioco di andare a verificare se un insieme è infinito o no, emergono aspetti paradossali, come il fatto che *sottoinsiemi propri* dei numeri naturali, come i numeri pari o i numeri dispari, o i quadrati perfetti, sono anch'essi insiemi infiniti. **Fig. 25** .

Questo aspetto, considerato paradossale per secoli (da **G. Galilei**, per esempio), sul finire dell'Ottocento è stato scelto per dare una definizione d'insieme infinito: **DEF** (di **Dedekind**, 1872) un **insieme** è **infinito** quando si può porre in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

**DEF** Il "numero degli elementi" di un insieme si chiama **cardinalità** (o **potenza**) dell'insieme (dall'aggettivo: cardinale).

**DEF** L'insieme ***N*** e gli insiemi che è possibile mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme ***N*** si dice che hanno la **cardinalità del numerabile** (i naturali si utilizzano per numerare, per esempio) e questa cardinalità si indica con il simbolo: **|*N*|** (un adattamento del significato usuale di <u>modulo</u>, all'infinito) oppure con il simbolo: $\aleph_0$ (il simbolo $\aleph$ si legge: "aleph": è la prima lettera dell'alfabeto ebraico).

Si dimostra che l'insieme **Z** degli interi e l'insieme **Q** dei numeri razionali hanno cardinalità del numerabile!

**THM + DEF** Si dimostra anche che, invece, gli insiemi: **I** dei numeri *irrazionali*, **R** dei numeri *reali* e **C** dei numeri *complessi* hanno una cardinalità superiore a quella di **N**, pari a $2^{|N|}$ (indicata anche con: $\aleph_1$): la **cardinalità del continuo**.

Chi fra voi volesse conoscere le dimostrazioni delle affermazioni precedenti, potrebbe leggere un agile libretto dal titolo Roberto Zanasi, *Verso l'infinito ma con calma - Un dialogo su matematica, insiemi e numeri*, Scienza express, Trieste; oppure, più brevemente, qui: http://www.alessandraprofangelucci.it/matematica/analisi (approfondimento numeri razionali e approfondimento numeri reali).

Esistono dunque diverse *potenze* d'infinito (chissà poi se ci si ferma ad $\aleph_1$ o...). Di questi aspetti notevoli si è occupato **Georg Cantor**, si dice perdendoci il **senno**.

E sapete inoltre dallo studio dei limiti che - all'interno della potenza del continuo - esistono diverse velocità con le quali si può tendere all'infinitamente grande o all'infinitamente piccolo: <u>esistono **diversi ordini** d'**infinito** e d'**infinitesimo**</u>.

Capite perché questi temi contribuirono a modificare il concetto di *verità* matematica? Non abbiamo tempo di addentrarci nei meandri dell'infinito, diamo un'occhiata a un **paradosso** e a un'**antinomia** celeberrimi (un paradosso è una conclusione logica e non contraddittoria che si scontra con il nostro modo abituale di vedere le cose, mentre un'antinomia è una proposizione che risulta autocontraddittoria sia nel caso che sia vera, sia nel caso che sia falsa) che vi lascio da comprendere, per bene, come esercizio:

## Il Paradosso del Grand Hotel di Hilbert

Hilbert immagina un hotel con infinite stanze, tutte occupate, ed afferma che qualsiasi sia il numero di altri ospiti che sopraggiungano, sarà sempre possibile ospitarli tutti, anche se il loro numero è infinito.

Nel caso semplice, arriva un singolo nuovo ospite. Il furbo albergatore sposterà tutti i clienti nella camera successiva (l'ospite della 1 alla 2, quello della 2 alla 3, etc.); in questo modo, benché l'albergo fosse pieno è comunque, essendo infinito, possibile sistemare il nuovo ospite.

Un caso meno intuitivo si ha quando arrivano infiniti nuovi ospiti. Sarebbe possibile procedere nel modo visto in precedenza, ma solo scomodando infinite volte gli ospiti (già spazientiti dal precedente spostamento): sostiene allora Hilbert che la soluzione sta semplicemente nello spostare ogni ospite nella stanza con numero doppio rispetto a quello attuale (dalla 1 alla 2, dalla 2 alla 4,etc.), lasciando ai nuovi ospiti tutte le camere con i numeri dispari, che sono essi stessi infiniti, risolvendo dunque il problema. Gli ospiti sono tutti dunque sistemati, benché l'albergo fosse pieno.

## L'Antinomia di Russell

L'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi appartiene a sé stesso se e solo se non appartiene a sé stesso.

Infatti: **se** appartiene a sé stesso **non** può appartenere all'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi, ma se **non** appartiene a sé stesso **non** appartiene all'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stesso!

Il paradosso di **Bertrand Russell** (1872 – 1970), che sembra un *giochino di parole*, ebbe un ruolo fondamentale nella crisi dei fondamenti della matematica in quanto dimostrò la **contraddittorietà** della teoria ingenua (o intuitiva) degli insiemi di Georg Cantor.

# Altre rappresentazioni dell'infinito

Ma questi aspetti notevoli, stupefacenti, interessanti ma stranoti, potete trovarli in tanti libri, magari anche nella biblioteca di scuola.

Per esempio, oltre a quello sopra citato: Lucio Lombardo Radice, "L'infinito", Editori Riuniti; oppure: Eli Maor (traduttrice: Maria Spoglianti), "All'infinito e oltre", Gruppo Ugo Mursia Editore.

Oggi non vi parlerò oltre di questi aspetti, ma concluderò regalandovi altre immagini d'infinito. Prima ricapitoliamo quanto abbiamo visto sinora:

- l'**inversione circolare** consente giochi di trasformazione reciproca tra infinito e finito e fra infinito potenziale (del piano euclideo) e infinito attuale (il centro del cerchio d'inversione);
- il **modello della geometria iperbolica di Poincaré** rende *visibile* in maniera emblematica un possibile legame fra infinito potenziale (il processo del tassellare che non ha mai fine) e infinito attuale (il cerchio limite che è il luogo ove *risiede* l'infinito del modello).

La geometria consente di affrontare ciascuna di queste concezioni d'infinito mediante un approccio cognitivo pre-evidente: più o meno **immediato**, più o meno **formalizzabile**.

I pro e i contro dell'utilizzo delle immagini nella comprensione dei concetti, che si tratti di didattica come di divulgazione, non possono non presentarsi in quest'ambito in cui con concetti, quindi con immagini, così significative, ci si va a confrontare.

La possibilità di "vedere" ha i suoi vantaggi ma anche le sue "insidie": ad esempio l'occhio-cervello registra in maniera corretta, anche se non può immaginare la raffinatezza matematica che lo regola, il modello di Poincaré, ma può trovarsi spiazzato di fronte ad alcune costruzioni prospettiche che possono risultare anche molto articolate (Un esempio per tutti, la Galleria Borromini a Roma **fig. 31**), o anche ingannato, come nell'ultimo argomento di cui ci andiamo a occupare.

## La spirale logaritmica

La curva in questione è stata studiata da **Torricelli** (1607-1647), **Descartes** (1596 – 1650) e **Jakob Bernoulli** (1654-1705), tra gli altri, con strumenti matematici elementari come le proporzioni.

Ce ne occupiamo in questo contesto, sia perché offre interessanti spunti di riflessione riguardo all'infinito sia perché vi permette di mettere alla prova alcuni degli strumenti matematici che state imparando ad adoperare.

Se $\boldsymbol{\rho}$ è il raggio uscente da un punto **A** (polo della spirale) c'è la stessa proporzione tra la lunghezza della curva **ANB** e la lunghezza del segmento **AB**, e tra la lunghezza della curva **ANBC** e la lunghezza del segmento **AC (fig. 32)**.

Ovvero: detta ***s*** la lunghezza di una porzione di curva e $\boldsymbol{\rho}$ la lunghezza del raggio corrispondente: $\frac{s}{\rho} = k$ Con $k$ $(\neq 1)$ costante che individua quel che Torricelli chiamò *specie* della spirale e che la caratterizza completamente.

Passando ai differenziali, l'equazione diventa: $\frac{ds}{d\rho} = k$, dove, applicando il teorema di Pitagora al **triangolo rettangolo** in **fig.33**, si ha:

$ds^2 = d\rho^2 + (\rho \cdot d\omega)^2$ da cui, dividendo tutto per $d\rho^2$: $\left(\frac{ds}{d\rho}\right)^2 = 1 + (\frac{\rho \cdot d\omega}{d\rho})^2$ e, sostituendo al posto di $\frac{ds}{d\rho}$ , k (visto che siamo partiti da $\frac{ds}{d\rho} = k$): $k^2 = 1 + (\frac{\rho \cdot d\omega}{d\rho})^2$ e lavorando per esplicitare $\rho$: $k^2 - 1 = (\frac{\rho \cdot d\omega}{d\rho})^2$ ribaltando e estraendo la radice algebrica $\frac{d\rho}{\rho \cdot d\omega} = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$; portando $d\omega$ al secondo membro: $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} d\omega$ e, finalmente, integrando a variabili separate: $\ln(\rho) = \frac{\omega}{\sqrt{k^2-1}} + c$ da cui si capisce il **nome** della spirale. L'equazione si usa più agevolmente nella forma: $\rho = C \cdot e^{m \cdot \omega}$, dove m = $\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$ e $C = e^c$ ed è una costante al variare della quale l'equazione rappresenta sempre la stessa curva (proprietà di *autogenerazione* della spirale.

**OSS1** Il punto **A**, seppur chiaramente *visibile* nel disegno, è un punto "inaccessibile" della spirale. Infatti sapete che

$\lim_{\omega \to -\infty} C \cdot e^{m \cdot \omega} = 0$. Dunque il polo **A** risulta essere un *punto asintotico* della spirale (il verso positivo, nelle rotazioni, vi ricordo che è quello antiorario, perciò quello negativo è quello orario).

**OSS2** Come ci aspettiamo, invece: $\lim_{\omega \to +\infty} C \cdot e^{m \cdot \omega} = +\infty$.

La spirale logaritmica ci permette di incontrare l'*infinitamente piccolo* e l'*infinitamente grande*. L'infinitamente piccolo corrisponde a un punto "visibile" ma irraggiungibile. **Un infinito attuale** che sta lì sotto i nostri occhi senza che possiamo mai vederlo realmente.!

**Jakob Bernoulli** trovò molte proprietà della spirale logaritmica, e la considerava a tal punto *mirabilis* che volle fosse scolpita sulla sua tomba con la seguente didascalia: "*Eadem mutata resurgo*" [Sebbene cambiata, rinasco identica] Questa frase si riferisce ad una delle sue *scoperte*: se si opera su una spirale logaritmica con uno ZOOM (cioè si effettua una similitudine) si ottiene una spirale ***uguale*** a quella di partenza [stessa forma e stessa lunghezza!]. Ritroviamo in questa proprietà della spirale logaritmica la definizione di insieme infinito di **Dedekind**: la biettività con un sottoinsieme proprio.

Ancora una nuova immagine - questa volta <u>non</u> in senso matematico - di infinito, come di un processo continuo: senza fine, in cui, pur muovendomi, resto ferma: non arrivo a nessun approdo: resto nello stesso punto.

La trasformata per inversione di una **spirale logaritmica** con polo nel centro d'inversione viene illustrata in maniera più espressiva proprio dalle equazioni: abbiamo una curva di equazione: $\rho = a^{\omega}$ che diventa: $\frac{1}{\rho'} = a^{\omega}$ cioè $(\rho')^{-1} = a^{\omega}$ cioè: $\rho' = a^{-\omega}$ quindi una spirale logaritmica di stessa specie della precedente ma ottenuta *ruotando in senso orario*, invece che antiorario (**Fig.**)!

Se consideriamo una **spirale con polo sull'asse delle *x***, nel punto ($\frac{1}{2}$;0) il polo andrà in (2;0) e in **O** si creerà un secondo polo dando luogo, citando le parole di Donald Coxeter, ad uno dei modi più belli per portare l'infinito al finito. Escher ne ha tratto spunto per un disegno particolarmente suggestivo: **fig. 36**.

## Conclusioni

La *crisi dei fondamenti* porta a rinunciare alla **verità** e *accontentarsi* della **coerenza** (che diventa il nuovo criterio di verità). Ma è questa propriamente una *diminutio*? O piuttosto è una possibilità? La libertà, opportunamente vincolata, non porta, infatti, alla **bellezza**? E una conoscenza che è responsabilità interamente umana vi sembra inferiore a una conoscenza come scoperta delle opere di un dio?

Tra le *invenzioni* dell'uomo, posto d'onore spetta senz'altro all'**infinito** (anche perché sfugge così abilmente al *controllo* del suo *inventore*), concetto sul quale *poggia* tanta parte della matematica. Ripercorriamo le diverse *visioni* di infinito che abbiamo incontrato:

- l'infinito multiplo degli **insiemi numerici**;
- il **modello della geometria iperbolica di Poincaré** che rende visibile in maniera emblematica il processo che funge da liaison fra infinito potenziale (il processo del tassellare che non ha mai fine) e infinito attuale (il cerchio limite che è il luogo dove risiede l'infinito del modello);
- i giochi di trasformazione reciproca tra infinito e finito differenti *tipi* d'infinito dell'**inversione circolare**;
- il doppio infinito della **spirale logaritmica**: il polo (infinitamente piccolo), effetto ottico di un infinito attuale e l'infinitamente grande dell'avvolgersi infinito delle sue spire e dell'avvolgersi <u>fino all'infinito</u> delle stesse (una quantità infinita di spire che si avvolgono *fino* all'infinito).

Se pure tante cose abbiamo tralasciato, abbiamo visto tante cose. E siamo solo arrivati agli inizi del '900! Buon proseguimento: spero di avervi fatto voglia di continuare a cercare.

### Piccola bibliografia:


Agazzi E. - Palladino D., 1998, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Milano, A. Mondadori

Coxeter H. S. M., 1957, *Non-Euclidean Geometry*, Toronto, University of Toronto Press

Geymonat Ludovico, *Lineamenti di filosofia della scienza*, 2006, Novara, Utet Università

Maor Eli (traduttrice: Maria Spoglianti), 1993, "All'infinito e oltre", Gruppo Ugo Mursia Editore.

Radice Lucio Lombardo, 2006, “L’infinito”, Editori Riuniti;

Zanasi Roberto, 2011, *Verso l'infinito ma con calma - Un dialogo su matematica, insiemi e numeri*, Trieste, Scienza Express,