

Relazioni

In matematica si chiama **relazione** fra due *insiemi* una **legge** che collega elementi del primo insieme a elementi del secondo insieme.

ES Se prendiamo l'insieme delle **persone** e l'insieme dei **cani**, è una relazione: "essere padrone di...". Ogni persona che possiede un cane è "collegato" al proprio cane.

Quando i due *insiemi* contengono numeri (o **grandezze**) i tipi di relazione che si studiano, in genere, sono espressi mediante formule **matematiche** e mediante **grafici**.

Relazione di proporzionalità diretta, quadratica e inversa

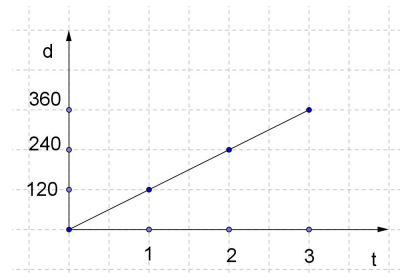
Un'automobile cammina lungo un'autostrada. Supponi di poter misurare la distanza che percorre (in km) e il tempo impiegato a percorrerla (in h). In tabella i risultati delle tue misure. Ogni distanza è *in relazione* con il tempo impiegato a percorrerla.

d (km)	120	240	360
t (h)	1	2	3
v (km/h)	120	120	120

Nella terza riga il **rapporto** tra ciascuna distanza e il tempo corrispondente. Come puoi vedere, questo rapporto è costante e vale 120 km/h. Cioè: $d/t = 120 \text{ km/h}$ (ed è la velocità media).

→ Una **relazione** fra numeri il cui **rapporto** è **costante**, si chiama: **proporzionalità diretta**.

Grandezze *legate* da questa relazione sono **direttamente proporzionali**. Se rappresenti in un **grafico** grandezze direttamente proporzionali ottieni una **retta** passante per **O**.



N.B. E' un errore GRAVE dire che due insiemi di grandezze sono direttamente proporzionali perché "crescono tutt'e due" oppure "quelle del primo insieme crescono e anche quelle del secondo"¹. Potresti avere infatti insiemi di valori che "crescono insieme" ma in modo differente da quello della proporzionalità diretta.

Per **esempio** guarda la tabella a destra. I valori "crescono insieme" ma questa volta non è costante il loro **rapporto** (terza riga), ma il **rapporto** tra i valori della prima riga e i **quadrati** dei valori della seconda (quarta riga). Cioè $d/t^2 = 10 \text{ km/h}^2$ (accelerazione media).

d (km)	10	40	90
t (h)	1	2	3
v (km/h)	10	20	30
a (km/h ²)	10	10	10

→ Quando è **costante** il rapporto fra una grandezza e il **quadrato** di un'altra si parla di relazione di **proporzionalità quadratica**. Il **grafico** di grandezze *legate* da proporzionalità quadratica è un ramo di **parabola** (verificalo con i valori in tabella).

→ Insiemi di grandezze il cui **prodotto** è costante, invece, si dicono invece **inversamente proporzionali** e il grafico che rappresenta questa relazione è un ramo **d'iperbole**.

Sono per **esempio** *inversamente proporzionali* base e altezza di **rettangoli con stessa area**. Rappresenta su un **grafico** le seguenti grandezze:

x	1	2	3	4	6	12			
y	12	6	4	3	2	1			

¹ Per descrivere grandezze **direttamente proporzionali** invece, un altro modo corretto di indicarle è: "raddoppiando o triplicando le grandezze del primo insieme, raddoppiano o triplicano le grandezze del secondo".

Rette nel piano cartesiano

Punti nel piano cartesiano

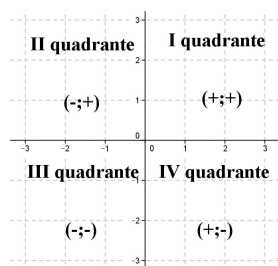
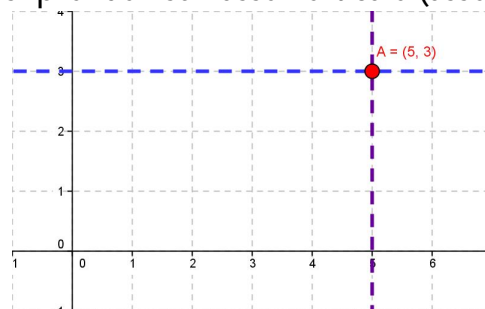
In geometria analitica un **punto** corrisponde a una **coppia ordinata**² di numeri: le **coordinate**. ES **A(5;3)**

Il primo numero della coppia si chiama **ascissa** e si "prende" sull'asse orizzontale (asse delle ascisse o delle x. In breve: **adx**).

Il secondo numero della coppia si chiama **ordinata** e "si prende" sull'asse verticale (asse delle ordinate, delle y. In breve: **ady**).

A partire dalle coordinate si tracciano rette perpendicolari agli assi (proiettanti), la cui intersezione corrisponde al punto considerato.

A partire da un punto del piano si tracciano rette perpendicolari agli assi (proiettanti). Ciascuna intersezione con gli assi (proiezione) rappresenta una coordinata (secondo quanto detto sopra) del punto.



Nel piano cartesiano, si distinguono **quattro quadranti**, che si numerano in verso antiorario. I punti del **I quadrante** hanno ordinate entrambe positive, i punti del **II quadrante** hanno ascissa negativa e ordinata positiva, i punti del **III quadrante** hanno entrambe le coordinate negative e i punti del **IV quadrante** hanno ascissa positiva e ordinata negativa. Tutto questo è schematizzato nella figura a fianco.

Introduzione alle equazioni di rette nel piano cartesiano

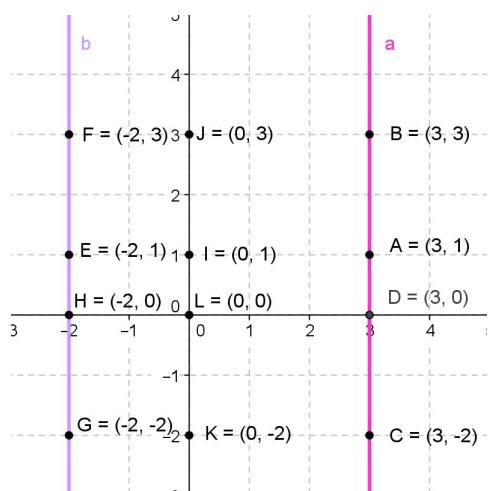
La relazione³ fra le coordinate dei punti di una retta, viene scritta mediante un'uguaglianza nella quale compaiono **numeri** e **incognite**⁴, è un'**equazione**.

- il simbolo per l'ascissa è la **x**, il simbolo per l'ordinata è la **y**
- in una retta ci sono infiniti punti e perciò infinite coppie di numeri che sostituiti, il primo alla **x** e il secondo alla **y**, rendono **vera** l'uguaglianza (sono soluzioni dell'equazione)
- tutte e sole le **soluzioni** dell'equazione di una retta sono **coordinate** di **punti** della retta⁵

² L'**ordine** in cui sono scritti i numeri è fondamentale: cambiando l'ordine cambia il punto.
³ In matematica si chiama *relazione* fra *insiemi* di cose (in genere insiemi di numeri) una **legge** che collega gli elementi dei due insiemi. Abbiamo studiato le rette proprio per studiare il *tipo* di relazione che collega le coordinate dei punti di una retta: la **relazione lineare**. E alcuni casi particolari: la **relazione costante** (retta parallela all'*adx*) e la **relazione di proporzionalità diretta** (retta passante per O).
⁴ Le **incognite** presenti nell'equazione di una retta, però, non rappresentano "cose trovare", com'era nelle equazioni di primo grado, ma ascissa e ordinata di un **punto generico** della retta. Vengono chiamate, per questo: **variabili**. Capirai meglio con gli esempi. Spero.
⁵ Cioè: **se** un punto sta su una retta, **allora** le sue coordinate sono soluzione dell'equazione della retta; **se** un punto non sta su una retta, **allora** le sue coordinate non possono essere soluzione dell'equazione della retta. Sembra una sciocchezza ma ha conseguenze importanti.

Per scrivere che una *certa retta* ha una *certa equazione*, si utilizza questa *convenzione*: si scrive il *nome della retta* (una lettera fra le ultime dell'alfabeto, o la lettera **r** con un **pedice** che indichi due punti della retta), poi " : " e poi si scrive l'equazione.

Equazione di una retta parallela all'ady



I **punti** di ciascuna retta parallela all'*ady*, come quelle in figura e come l'*ady* stesso, hanno tutti ascissa uguale a uno stesso numero.

I punti della retta **a** hanno tutti ascissa uguale a 3
 → **a** : $x = 3$

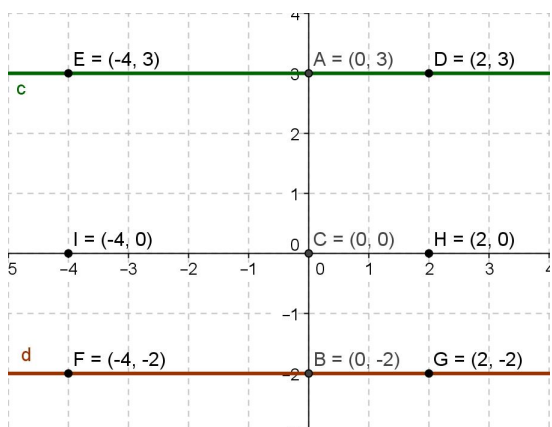
I punti dell'*ady* hanno tutti ascissa uguale a 0
 → *ady* : $x = 0$

I punti della retta **b** hanno tutti ascissa uguale a -2
 → **b** : $x = -2$

Le rette **parallele all'ady**, compreso l'*ady* stesso, hanno tutte un'equazione rappresentativa che ha la stessa forma: $x = t$. In simboli:

$r // ady$ sse (opp \Leftrightarrow) $r: x = t$, con $t \in \mathbb{R}$ (si legge: "**t** è un numero reale")

Equazione di una retta parallela all'adx



I **punti** di ciascuna retta parallela all'*adx*, come quelle in figura e come l'*adx* stesso, hanno tutti ordinata uguale a uno stesso numero.

I punti della retta **c** hanno tutti ordinata 3
 → **c** : $y = 3$

I punti dell'*adx* hanno tutti ordinata 0
 → *adx* : $y = 0$

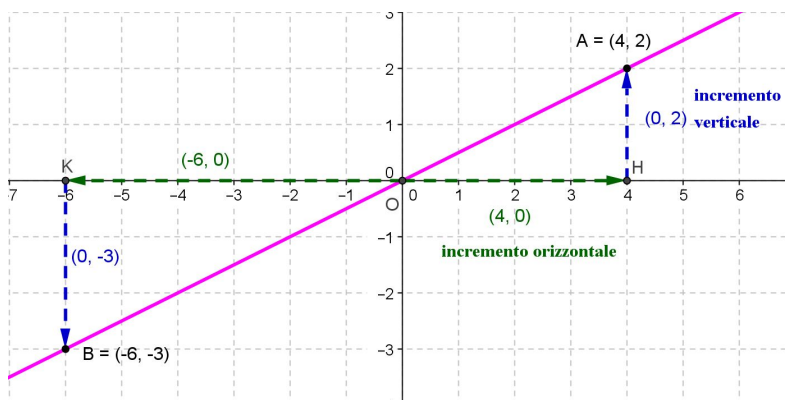
I punti della retta **d** hanno tutti ordinata -2
 → **d** : $y = -2$

Le rette **parallele all'adx**, compreso l'*adx* stesso, hanno tutte un'equazione rappresentativa che ha la stessa forma: $y = b$. In simboli:

$r // adx$ sse (opp \Leftrightarrow) $r: y = q$, con $q \in \mathbb{R}$ (si legge: "**q** è un numero reale")

Equazione di una retta passante per l'origine. Pendenza di una retta.

• Guardando la retta in figura – passante per **O(0;0)** e per **A(4;2)** – immagina di poter *muovere* un punto **P(x;y)** lungo tale retta. Mentre **P** si muove la sua *ascissa* x e la sua *ordinata* y cambiano continuamente ma **P** non disegna nessuna *variazione di inclinazione*. Cioè la retta ha **pendenza costante**.



- Cioè il **rapporto** tra **incremento verticale** (numeratore) e **incremento orizzontale** (denominatore) è costante: qualunque punto si prenda sulla retta – anche nel **III quadrante** – e tale rapporto risulta, per la retta nella figura, $\frac{1}{2}$; come puoi vedere!

- Si vede anche dal disegno come questa **pendenza** corrisponde al rapporto fra ordinata e ascissa di un qualunque punto. In linguaggio matematico sarà dunque: $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$.

- E, ricordando come si *opera* in un'equazione: $y = \frac{1}{2} \cdot x$ che è l'**equazione della retta**.

Rivediamo il ragionamento che porta a scrivere l'equazione di una retta passante per O:

1) definiamo la pendenza "**m**" di una retta passante per O: $m = \frac{\text{incremento verticale}}{\text{incremento orizzontale}}$

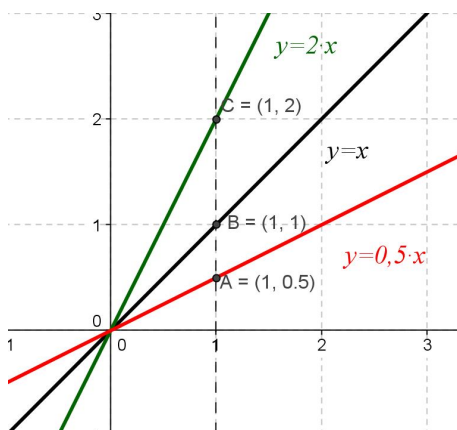
2) osserviamo come la pendenza, per rette passanti per O che non siano l'*ady*, si trovi facendo il rapporto fra ordinata e ascissa di un punto qualunque della retta.

3) Scriviamo il punto (2) in formula, per la retta passante per O e A(4;2): $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$

4) Esplicitiamo la y e scriviamo l'**equazione** della retta per O e A: $r_{OA} : y = \frac{1}{2} \cdot x$

Equazione generica di una retta passante per O (*ady* escluso⁶)

Una retta che passa per O avrà *quasi* sempre (*ady* escluso) **equazione** del tipo: $y = m \cdot x$
($m = y/x$) con $m \in \mathbb{R}$



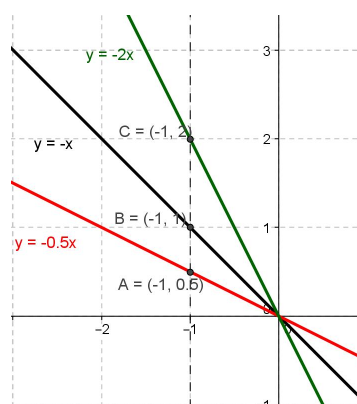
Al crescere della pendenza, cresce l'*inclinazione* della retta. La retta di equazione $y=x$ (la **bisettrice** di I e III quadrante), che ha pendenza **1**, è uno *spartiacque* fra le rette di pendenza maggiore e le rette di pendenza minore di 1.

In figura ti ho segnato le coordinate di alcuni punti con ascissa 1, perché ti fosse facile controllare il valore della pendenza e quindi l'equazione della retta corrispondente.

Ma la pendenza è per forza un **numero positivo**? NO.

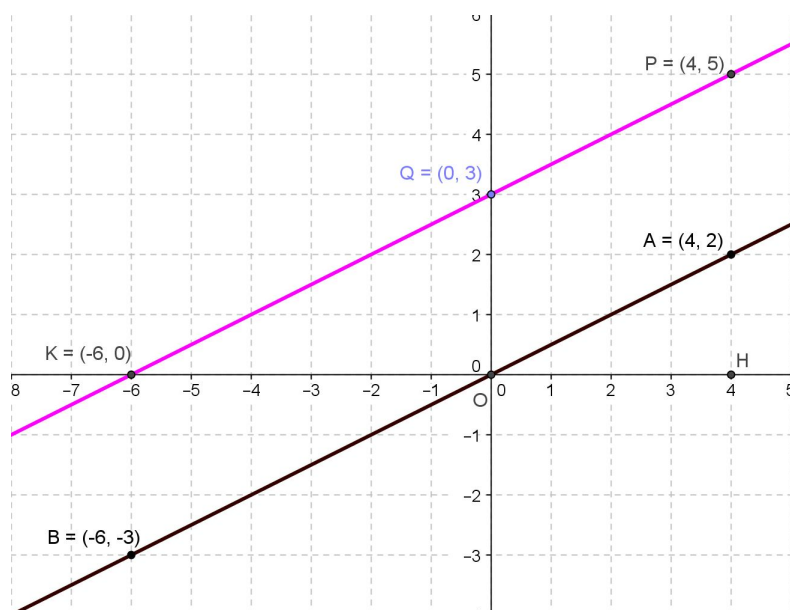
Se gli incrementi (verticale e orizzontale) hanno **segno discorde** la pendenza della retta sarà negativa. Ma gli incrementi abbiamo visto che coincidono con le coordinate dei punti della retta, se questa passa per O. E gli unici punti ad avere coordinate discordi sono quelli del **II** e **IV** quadrante.

La retta di equazione $y = -x$ (la **bisettrice** di II e IV quadrante) ha pendenza -1 . Come l'altra bisettrice è uno *spartiacque*...



⁶ Preso un qualunque punto sull'*ady*, l'**incremento orizzontale** è 0. Nel calcolo della **pendenza** lo 0 sta al denominatore e una frazione con denominatore 0 non ha senso!

Equazione di una retta non passante per O e non parallela all'ady



Se osservi la *rappresentazione grafica* della retta r_{PO} , parallela alla retta r_{OA} e passante per il punto $Q(0;3)$, potresti scrivere subito l'equazione di questa retta r_{PO} !

Se r_{OA} e r_{PO} sono **parallele**, infatti, avranno **stessa inclinazione** e perciò **stessa pendenza**. Questa retta r_{PO} puoi pensare di ottenerla aggiungendo alle **ordinate** di ciascun punto di r_{OA} +3 (te ne accorgi guardando $Q(0;3)$, ma anche $P(4;5)$ e $K(-6;0)$).

$$\text{Sarà pertanto: } r_{PO} : y = \frac{1}{2} \cdot x + 3$$

Equazione generica di una retta NON passante per O (e NON parallela all'ady)

In generale, *disegnata sul piano cartesiano una retta r con pendenza m e intersezione con l'asse delle y in Q(0;q), r avrà equazione: $y = mx + q$*

• Nell'equazione precedente si possono trovare, come *casi particolari* anche *alcune* delle equazioni incontrate precedentemente. Si ha infatti che:

- Per le rette che passano per $O(0;0)$ si ha che $q = 0$ perciò l'equazione diventa: $y = mx$
- Per l'asse delle x si ha anche $m = 0$, perciò l'equazione diventa: $y = 0$
- Per le rette parallele all'asse delle x, che incontrano l'asse delle y in $Q(0;q)$, la pendenza è sempre $m = 0$ Dunque l'equazione diventa: $y = q$

N.B. Le equazioni $x = a$ non sono casi particolari della $y = mx + q$. Per le rette di questo tipo infatti, si presenta la *stessa situazione dell'asse delle y*: non è possibile calcolarne la pendenza e perciò l'equazione non si può ottenere dalla $y = mx + q$.

Si ottiene invece la loro equazione osservando direttamente che tutti i punti di ciascuna di queste rette hanno la stessa ascissa.

L'equazione di una retta nel piano cartesiano si presenta in una delle forme seguenti:

$$y = m \cdot x + q \quad \text{opp} \quad x = a$$

Pendenza di una retta non passante per O (LAB INF: Geogebra)

Se una retta passa per O , la sua pendenza è data dal **rapporto** fra **ordinata** (y) e **ascissa** (x) di *uno qualunque dei suoi punti*.

Se una retta NON passa per O , la sua pendenza non è più data dal rapporto fra ordinata e ascissa di uno qualunque dei suoi punti, ma dal rapporto fra l'**incremento** delle **ordinate** di **due** suoi punti e l'**incremento** delle **ascisse corrispondenti**.

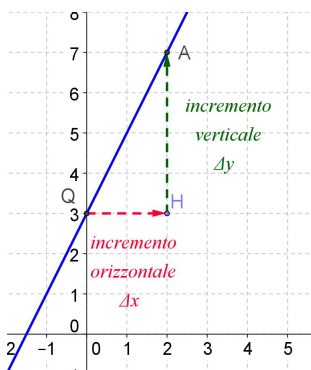
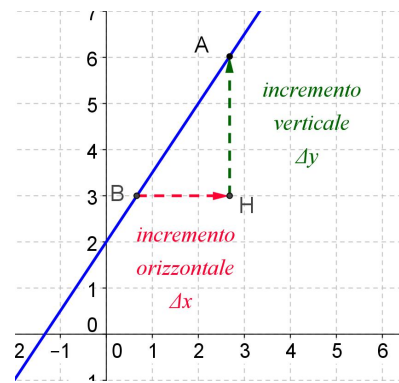
Cioè. Data una retta r_{AB} , passante per i punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, la pendenza di

r_{AB} si può indicare con m_{AB} e si ottiene così:

$$m_{AB} = \frac{\overrightarrow{AH}}{\overrightarrow{BH}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Se uno dei due punti è il punto di scissa 0: $Q(0; q)$

$$m_{QA} = \frac{y_A - q}{x_A - 0} = \frac{y_A - q}{x_A}. \text{ Più semplice...}$$



Avendo il grafico di una retta, il modo più semplice di ricavarne la pendenza è determinare gli incrementi fra il punto Q , di ascissa 0 (intersezione con l'ady) e un punto qualunque.

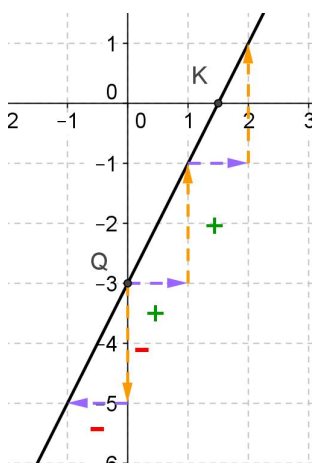
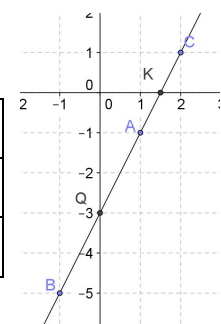
N.B. Conoscendo la pendenza m di una retta r , e l'ordinata q del punto Q d'intersezione di r con l'ady, l'equazione della retta è determinata $r: y = m \cdot x + q$.

Dall'equazione di una retta al suo grafico

EX Data la retta, $t: y = 2x - 3$, come si fa a disegnarla? Puoi scegliere tra due metodi:

1) Metodo della tabella. (Più semplice da capire, presenta però il problema dei **conti**. Specialmente se c'è da lavorare con frazioni).

x (valori scelti a caso)	0	1	-1	2
$y = 2x - 3$	$2 \cdot 0 - 3 = -3$	$2 \cdot 1 - 3 = -1$	$2 \cdot (-1) - 3 = -5$	$2 \cdot 2 - 3 = 1$
Nome sul disegno	Q	A	B	C



2) Metodo della scaletta. (Complicato da spiegare, è semplicissimo da utilizzare, una volta compreso, e permette di evitare i **conti**!). Si "parte" dal punto d'intersezione con l'ady $Q(0; -3)$ e si applica il concetto di pendenza. La pendenza della retta t è 2. Avendo definito la pendenza come rapporto tra due numeri, può essere comodo scrivere $2 = \frac{2}{1} = \frac{\text{incremento verticale}}{\text{incremento orizzontale}} = \frac{-2}{-1}$. A partire da Q puoi: **o** "andare verso l'alto" di 2 (*incremento verticale* = +2) e "andare a destra" di 1 (*incremento orizzontale* = +1) e, **o** "andare in basso" di 2 (*incremento verticale* = -2) e "andare a sinistra" di 1 (*incremento orizzontale* = -1). Unendo le **punte** delle frecce che indicano l'incremento verticale avrai un disegno della retta molto preciso.

N.B.: Per disegnare correttamente una retta devi determinare il **punto d'intersezione con l'adx**. Poiché questo punto ha **ordinata 0** (come TUTTI i punti sull'adx), per determinarlo DEVI sostituire al posto di y nell'equazione della retta $y = 2x - 3$ il valore 0. Ottieni così un'equazione in x : $2x - 3 = 0$ la cui soluzione, $x = \frac{3}{2}$, è l'**ascissa** del punto cercato (l'ordinata ce l'hai già: è 0!). Guarda sul disegno se "ti torna"...

Equazione di una retta passante per un punto e di pendenza (m) data

EX1 Scrivi l'equazione della retta di **pendenza 3** e passante per il punto **A(-1;-4)**

Si tratta di una retta con equazione del tipo: $y = m \cdot x + q$. Scrivere l'equazione significa sostituire le lettere **m** e **q** (parametri) con dei **numeri**.

Puoi cominciare a scrivere l'equazione della retta sostituendo al posto delle lettera **m** il numero **3**. Avrai così: $y = 3x + q$.

Sostituendo le coordinate di **A** al posto "giusto" (-1 dov'è scritto **x** e -4 dov'è scritto **y**) avrai un'equazione lineare in una sola incognita, in **q** e cioè: $-4 = 3(-1) + q \rightarrow q - 3 = -4$ (per la simmetria dell'uguaglianza) e infine: $q = -1$. Cioè $r_A : y = 3x - 1$.

Disegna la retta e poi inventa altri esercizi simili (anche con pendenza negativa e frazionaria)

Equazione di una retta passante per un punto e di intercetta (q) data

EX2 Scrivi l'equazione della retta passante per i punti **A(-1;-4)** e **Q(0;-1)**

Puoi cominciare a scrivere l'equazione della retta sostituendo al posto delle lettera **q** il numero -1 Avrai così: $y = mx - 1$.

Sostituendo le coordinate di **A** al posto "giusto" avrai questa volta un'equazione in **m** e cioè: $-4 = m(-1) - 1 \rightarrow -m - 1 = -4$ (per la simmetria dell'uguaglianza) e infine: $m = 3$. Of course!

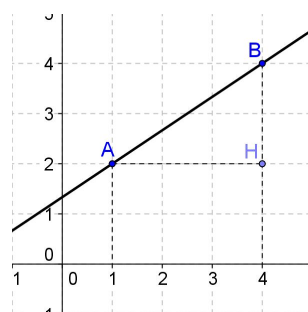
Equazione di una retta passante per due punti

EX "Dati i due punti **A(x_A;y_A)** e **B(x_B;y_B)**".

EX3 Dati i punti **A(1;2)** e **B(4;4)** disegna la retta passante per **A** e **B** (r_{AB}) e scrivine l'equazione rappresentativa.

Innanzitutto puoi osservare che r_{AB} non è parallela agli assi cartesiani e non passa per **O**, quindi la sua equazione sarà del tipo: $y = mx + q$.

x e y sono due **variabili** che indicano le coordinate di un generico punto che si muove lungo la retta. Scrivere l'equazione di r_{AB} significa dunque attribuire un valore numerico determinato ai parametri m e q. Per far questo devi trovare la pendenza e poi determinare **q** nel modo mostrato poco sopra.



Per trovare la pendenza disegna **A** e **B** sul piano cartesiano e proiettali su adx e ady .

Indica con **H** il punto d'intersezione fra: proiezione di **B** su adx e prolungamento della proiezione di **A** sull' ady . Viene così a formarsi un triangolo rettangolo: **AHB**, retto in **H**.

Osservando questo triangolo e ricordando quel che abbiamo detto della pendenza di una retta, secondo te, come si trova la pendenza di r_{AB} ? $m_{AB} = \frac{BH}{AH} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Ora che hai m_{AB} Puoi scrivere l'equazione della retta così: $y = m_{AB}x + q$

Devi trovare **q**: ti trovi nell'esercizio precedente $y_A = m_{AB} x_A + q$ quindi: $q = y_A - m_{AB} \cdot x_A$. Ovviamente avresti avuto lo stesso risultato sostituendo le coordinate di B.