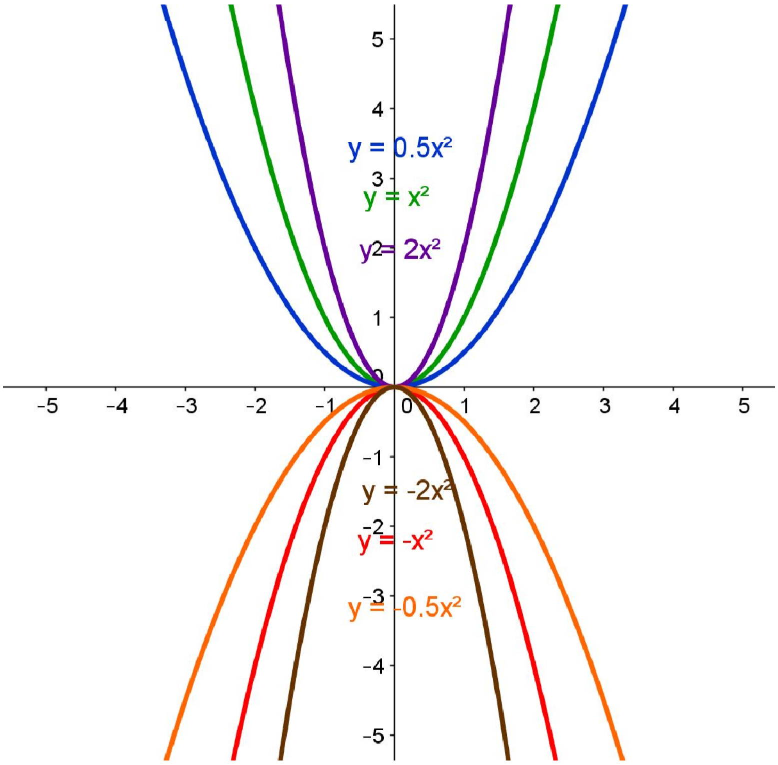
La parabola con asse parallelo all'*ady*

I) Parabola con vertice nell'origine degli assi cartesiani

I disegni degli esercizi dall'1 al 3 della scheda di laboratorio, sono i seguenti:



- Quindi il segno del coefficiente di x^2 determina innanzitutto l'*orientamento* della parabola: se è <u>positivo</u> la parabola ha <u>concavità verso l'alto</u> e se è <u>negativo</u> ha <u>concavità verso il basso</u>
- Il punto di minimo/di massimo, si chiama **VERTICE** della parabola e si indica con: **V**
- Una parabola è una curva **simmetrica** rispetto ad una retta[1] *speciale* passante per il **vertice**. Studieremo solo i casi in cui questa retta sia parallela all'*asse y* (o all'*asse x)*[2]. Tale retta si chiama **asse della parabola**.
- Se il coefficiente di x^2 *tende a* 0 la parabola va *aprendosi* mentre se *tende all'l'infinito*, la parabola va *chiudendosi*. Indicato con la lettera *a* tale coefficiente, possiamo riassumere tutto ciò nella tabella:

<table>
<tr><td rowspan="2">a>0</td><td>$a \to 0 \Rightarrow P \to adx$</td><td rowspan="4">Dove: P indica la parabola, le frecce magre indicano il verbo "tendere"; le frecce ciccione indicano l'implicazione logica (si leggono: "allora"); ∞ è il simbolo dell'infinito (il segno davanti va interpretato come normalmente in algebra); ady^+ indica il semiasse positivo delle y e ady^- indica il semiasse negativo delle y.</td></tr>
<tr><td>$a \to +\infty \Rightarrow P \to ady^+$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"><i>a</i><<i>0</i></td><td>$a \to 0 \Rightarrow P \to adx$</td></tr>
<tr><td>$a \to -\infty \Rightarrow p \to ady^-$</td></tr>
</table>

- Intersezione con *asse y*, intersezioni con *asse x* e vertice coincidono nel punto **O**(0;0).
- La parabola è **tangente** all'*asse x* nel punto **O**.

E così si conclude la trattazione del caso: "parabola con **vertice** in **O** e asse parallelo all'*asse y*".

Cioè il caso corrispondente all'equazione: $y = a \cdot x^2$.

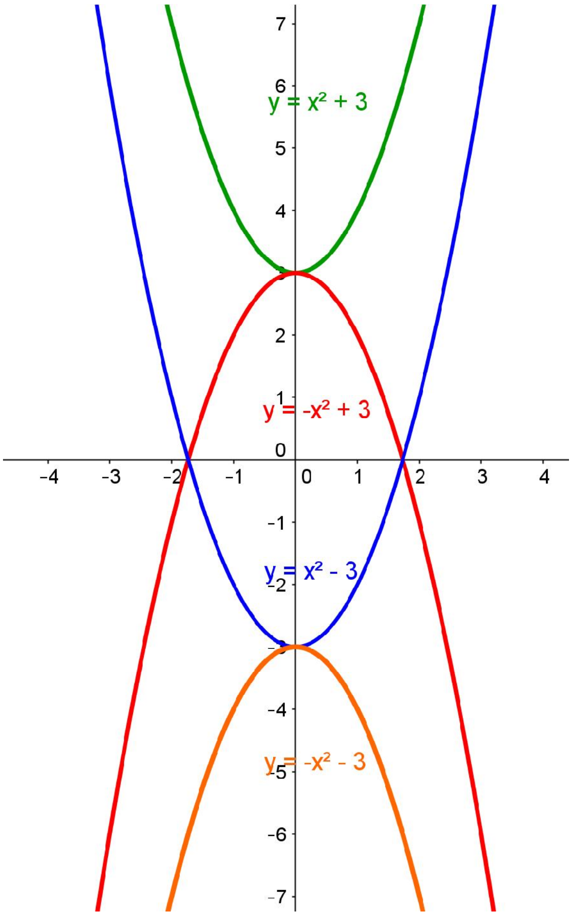
---

[1] Condizione necessaria e sufficiente affinché una **curva** sia **simmetrica rispetto ad una retta** è che tale retta sia **asse** di <u>ciascun segmento</u> che ha per estremi punti della curva con *ascisse* equidistanti dalla retta.

[2] E' simmetrica rispetto alla bisettrice di I e III quadrante della parabola con asse parallelo all'ady quindi ha equazione: $x = a \cdot y^2$

II) Parabola con vertice sull'asse delle *ordinate* (*ady*), ma non in O

Il coefficiente di x^2, a, influisce <u>solo e unicamente su *orientamento* e *apertura*</u>. Prendiamo perciò a=1, per semplicità. I disegni dell'**esercizio 4** della scheda di laboratorio sono:



- Le parabola di equazione $y=x^2+3$ <u>non</u> ha intersezioni con l'*asse x*

- La parabola di equazione $y=x^2-3$ ha intersezioni *reali distinte* con l'*asse x*, le cui ascisse otterrai risolvendo l'equazione: $x^2-3=0$. Cerchi infatti quei punti della parabola che hanno **ordinata 0**, e per trovarli dovrai sostituire ad y il valore 0: ricorda infatti cosa dice il "*Principio fondamentale della geometria analitica*".

Per risolvere l'equazione: $x^2-3=0$ si può portare il *termine noto* al secondo membro: $x^2=3$, e poi applicare i principio di equivalenza facendo l'operazione di *estrazione di radice quadrata*[3] ad ambo i membri (sapendo che $\sqrt{x^2} = \pm x$). Soluzioni: $x_1=+\sqrt{3}$ e $x_2=-\sqrt{3}$

Per *stimare* la posizione di questi valori sull'*asse x*, si osserva che: $\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$, cioè: $1<\sqrt{3}<2$. Con la calcolatrice: $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.

- Le parabole con $a<0$ sono <u>simmetriche delle precedenti</u>, rispetto l'*asse x*, come puoi vedere in figura.

In generale (usando quindi le lettere e non esempi numerici): una parabola ha **vertice** sull'*asse y* e asse coincidente con l'*asse y* sse la sua equazione è del tipo: $y=a\cdot x^2+y_V$

- L'intersezione con l'*asse y* coincide con il **vertice** e si trova nel punto $(0;y_V)$.

- Le intersezioni con l'*asse x* si trovano risolvendo l'equazione $a\cdot x^2+y_V=0$ e sono: $\pm\sqrt{-\frac{y_V}{a}}$.

Quindi sono **numeri reali** sse: $-\frac{y_V}{a}>0$ (una radice quadrata è un numero reale sse il radicando è positivo), cioè sse: $\frac{y_V}{a}<0$ (ricorda quello che hai studiato per le disequazioni: moltiplicando ambo i membri per un numero negativo, cambia il verso della disequazione), cioè sse *coefficiente di* x^2 e *termine noto* sono *discordi*.

- Infatti le parabole di equazione $y=x^2-3$ e $y=-x^2+3$ hanno intersezione con l'*asse x*, mentre le parabole di equazione $y=x^2+3$ e $y=-x^2-3$, no.

Data una parabola con V≡O, la **trasformazione** che può portarla ad avere **V** su *asse y* si chiama **traslazione**. Stiamo usando questo tipo di trasformazione per studiare le parabole, dal caso più semplice (V≡O) a quello più complesso. Ricordi che abbiamo parlato di traslazioni quando abbiamo trattato le rette oblique in posizione qualunque?

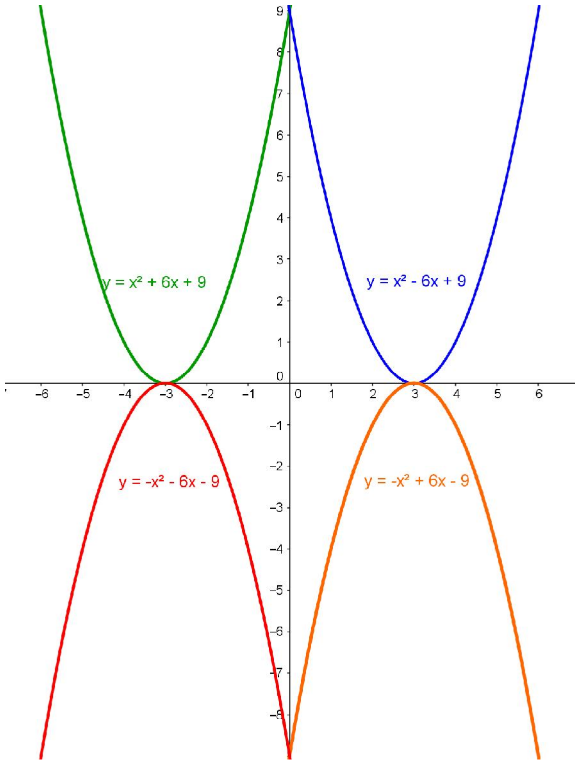
Le **traslazioni** sono isometrie (cioè una trasformazione che non modifica le lunghezze, le distanze e gli angoli), come le simmetrie e le rotazioni. Per ora le tratteremo in maniera intuitiva, rimandando una trattazione più rigorosa alla fine della trattazione delle parabole.

E così si conclude il caso: "parabola con **vertice** sull'*asse y* e asse parallelo all'*asse y*".

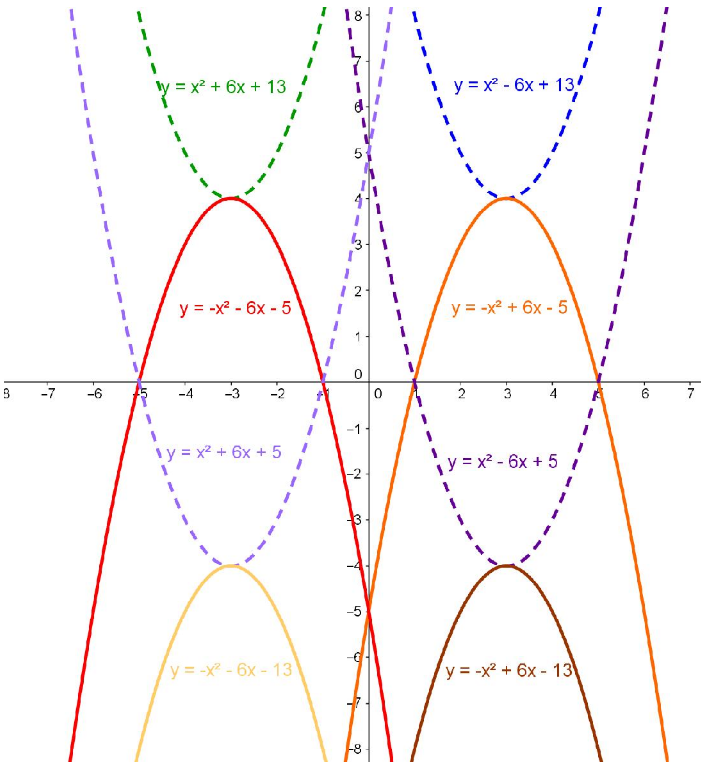
[3] $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow a>0, b>0 \wedge b^2=a$

III) parabola con vertice sull'asse delle *ascisse* (*adx*) ma non in O

Lasciamo ancora a=1. I disegni dell'**esercizio 5** della scheda di laboratorio sono (rispetto alla scheda, le equazioni corrispondenti ai disegni sono lo sviluppo del quadrato del binomio):



- Queste parabole, come puoi vedere, hanno vertice sull'*asse x*: sono **tangenti** all'*asse x* nel vertice (le due intersezioni con l'*asse x* coincidono con il vertice).
- Osserva che per avere l'ascissa del vertice, bisogna prendere l'**opposto** del *termine addizionato* ad x![4]
- Una parabola ha vertice sull'*asse x* sse la sua equazione è del tipo: $y=a\cdot(x - x_V)^2$
- L'ordinata del punto di intersezione con l'*asse y* si ottiene sostituendo 0 al posto di x nell'equazione, ottenendo così: $y_{\cap ady}=a\cdot(0- x_V)^2= a\cdot x^2_V$. Negli esempi delle schede infatti 9 o -9 (a seconda del segno di a) tale ordinata.
- Il caso **parabola con vertice sull'asse delle *ascisse* (*adx*) ma non in O**, cioè il caso corrispondente all'equazione:, finisce qui: V(x_V;0) e $\cap ady = (0; a\cdot x_V^{\,2})$



IV) parabola con vertice in un qualunque punto interno al piano

Inserendo contemporaneamente le *perturbazioni* dei casi **II** e **III**, avremo il caso più generale: $y = a\cdot(x - x_V)^2 + y_V$ che si ottiene dalla parabola con V≡**O** mediante una ***traslazione*** che porti il vertice nel punto del piano di coordinate $V(x_V; y_V)$.

- Per avere le ***intersezioni*** con *l'asse x*, quindi le soluzioni dell'equazione $a\cdot(x - x_V)^2 + y_V = 0$,

  faccio i seguenti passaggi: $(x - x_V)^2 = -\dfrac{y_V}{a}$

  $$x - x_V = \pm\sqrt{-\frac{y_V}{a}} \qquad x_{1,2} = x_V \pm\sqrt{-\frac{y_V}{a}}$$
- Per ottenere ***l'intersezione*** con l'*asse y* devi sostituire il valore 0 al posto di x.
- Fatti i conti. Ti deve venire: $a\cdot x_V^{\,2} + y_V$.

- Osserva nel disegno che legame c'è tra i segni dei coefficienti e le **simmetrie** che legano diverse parabole fra loro.

---

[4] Nel **II** caso abbiamo aggiunto algebricamente un numero al termine ax^2 ottenendo una traslazione lungo *l'ady*, mentre adesso togliamo algebricamente un numero al termine x e otteniamo una traslazione lungo l'*adx*. Sembra così esserci una *strana asimmetria! Ma* basta scrivere: $y - y_V = a\cdot x^2$ invece che $y = a\cdot x^2 + y_V$ e ecco che l'apparente asimmetria scompare! Capirai meglio più avanti..

La parabola con equazione in forma canonica e sistematizzazione definitiva

Nelle pagine precedenti abbiamo *giocato* con la parabola per cercare di comprendere le *relazioni* fra la sua posizione nel piano e le *caratteristiche* dell'equazione rappresentativa.

Per far questo ci siamo serviti di un'equazione particolare nella quale erano sempre ben visibili le **coordinate del vertice**, ma che non è l'equazione utilizzata comunemente. Quest'ultima, detta anche ***equazione canonica***, è scritta nella forma: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

a, *b* e *c* sono ***parametri*** sostituendo ai quali, di volta in volta, *numeri specifici* modifichi: **orientamento**, **apertura** e **posizione** della parabola nel piano cartesiano.

Andiamo a scoprire *regole* di carattere generale su tali parametri. Cioè andiamo a ritrovare in questa equazione *ufficiale* le scoperte fatte sinora.

Per far questo ci serve il **principio** d'**identità dei polinomi**:

Due polinomi di grado **n** sono uguali **sse** sono uguali i coefficienti delle variabile di grado **k**, con: $0 \le k \le n$.

Andiamo quindi a confrontare i coefficienti delle nostre due equazioni.

$$y = a \cdot (x - x_V)^2 + y_V = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x_V \cdot x + a \cdot {x_V}^2 + y_V$$
$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

- *a* è in entrambi coefficiente di x^2 (e non è un caso se ho scelto questa lettera)!
- Uguagliando i *coefficienti di x* si ha: $-2 \cdot a \cdot x_V = b$ quindi: $x_V = -\dfrac{b}{2 \cdot a}$: l'*ascissa del vertice*.
- Uguagliando i termini noti, e sostituendo al posto di x_V, $-b/2a$, si ha l'*ordinata del vertice*, infatti:

$$a \cdot {x_V}^2 + y_V = c \Leftrightarrow$$
$$a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + y_V = c \Leftrightarrow \frac{b^2}{4a} + y_V = c \Leftrightarrow y_V = \frac{4ac - b^2}{4a} \Leftrightarrow y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

- Per le intersezioni con l'*asse x* la relazione da considerare è: $x_{1,2} = x_V \pm \sqrt{-\dfrac{y_V}{a}}$.

Sostituiamo alle coordinate del vertice le relazioni fra i coefficienti dell'equazione canonica individuati:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\left(-\frac{\Delta}{4a} \cdot \frac{1}{a}\right)} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{con} \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Cogliamo subito l'occasione per osservare che, se $b = 2 \cdot \beta$ (cioè: $\beta = \dfrac{b}{2}$), la formula diviene:

$$\frac{-2\beta \pm \sqrt{(2\beta)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\beta \pm 2\sqrt{\beta - ac}}{2a} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a} \quad \text{con: } \beta^2 - ac = \frac{\Delta}{4}$$

✘ La parabola avrà intersezioni con l'*asse x* **sse** $\Delta \ge 0$. Per $\Delta = 0$ tali intersezioni saranno coincidenti (parabola tangente all'*asse x*) e per $\Delta > 0$ tali intersezioni saranno distinte.

✘ L'intersezione con l'*asse y* <u>esiste sempre</u> (ma può valere 0) ed è dato da **c**.

✘ Se ***c=0*** la parabola presenta una risoluzione semplificata in quanto $\cap ady \equiv adx_1 \equiv 0$ e, $ax^2 + bx = 0$ ha, oltre alla soluzione 0, la soluzione: $x_2 = -\dfrac{b}{a}$ che è il doppio di x_V.

Rivediamo alla luce degli ultimi risultati i quattro casi di posizione della parabola

I) parabola con vertice nell'origine degli assi cartesiani IDENTICO

II) parabola con vertice sull'asse y. L'equazione canonica è: $y = a \cdot x^2 + c$. **V**(0;***c***)≡intersezione con *asse y*. Le intersezioni con l'*asse x* sono reali sse ***a·c<0*** infatti è: $x_{1,2} \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

III) parabola con vertice sull'asse x. L'equazione canonica è del tipo: $y = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x_V + a \cdot x_V{}^2$ solo così è infatti riconducibile a quanto abbiamo visto e cioè: $y = a \cdot (x - x_v)^2$. <u>Spesso tale forma non è immediatamente individuabile</u> ma puoi avere certezza che sia presente, anche se camuffata, se ottieni Δ=0 al momento di calcolarti l'ordinata di **V** o le intersezioni con l'asse *x*! **V**(-b/2*a*;0).

IV) parabola con vertice nel piano. $V(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a})$; $\cap\, adx = c$; $\cap\, adx_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ o con la formula ridotta se ***b*** è pari. All'interno di questo caso è contenuto il caso ***c*=*0*** che ho trattato nella pagina precedente.

OSS CN (ma non sufficiente) affinché la parabola abbia intersezione con l'*asse x* è che *a·c*<0. In quel caso infatti, *-4a·c*>0 e quindi Δ>0 in quanto *somma di quantità positive*.

Per un grafico dignitoso

- Il **numero di punti minimo** da trovare è 5, se **V** e le intersezioni con *asse x* sono "distanti fra loro", e 7 altrimenti.
- Per poter effettuare i conti necessari ad utilizzare il **metodo della tabella** ti conviene scrivere l'equazione nella forma: $y = a \cdot (x - x_V)^2 + y_V$
- La scelta **dell'unità di misura** è FONDAMENTALE: la migliore è data dal m.c.m. fra i denominatori delle coordinate di **V** e delle intersezioni con *asse x*, se sono razionali. Altrimenti dovrai regolarti tu di caso in caso, osservando i numeri che hai!

Schema generale riassuntivo dei casi possibili

Indicate con x_1 e x_2 le intersezioni con l'*asse x* (CASELLE GRIGIE = CASI IMPOSSIBILI

	b,c=0	***b=0***	***c=0***	***a, b, c ≠ 0***
Δ>0 $x_1 \neq x_2$		sse ***a·c***<0	$x_1=0$ e $x_2=2x_V$	se ***a·c***<0 **o** $b^2 > a \cdot c$
Δ=0 $x_1 \equiv x_2$	Vertice e intersezioni con gli assi coincidono in **O**			sse **quadrato binomio**
Δ<0 $x_1, x_2 \notin \Re$ ·		sse ***a·c***>0		se ***a·c***>0 **e** $b^2 < a \cdot c$

Osserva come tale schema non tenga conto esplicitamente delle differenze fra i casi *a*>***0*** e *a*<***0***. Tali differenze sono comprese nella valutazione del segno del prodotto *a·c*!

Nei libri viene sempre fornita la definizione di **parabola** come **luogo geometrico**. Lascio a te il divertente gioco di mettere in relazione quella definizione con quanto studiato sinora! Facoltativa quest'anno. L'anno prossimo sarà obbligatoria.